第 41 卷 第 6 期
2013 年 12 月
福州大学学报(自然科学版)
Journal of Fuzhou University(Natural Science Edition)
Vol. 41 No. 6
Dec. 2013

DOI:10. 7631/issn. 1000 - 2243. 2013. 06. 0972 文章编号:1000 - 2243(2013)06 - 0972 - 03

一类带移民两性分支过程的非零极限行为

刘 宣

(福州大学阳光学院，福建 福州 350015)

摘要：讨论一类带移民两性分支过程的非零极限性质. 首先简单介绍这种两性分支过程模型，得出该过程是不可约和遍历的，最后利用马氏链、鞅论、两性分支过程的相关结论考查了该过程的非零极限行为.

关键词：两性分支过程；不可约；平均增长率；配对函数

中图分类号：O211.65 **文献标识码**：A

Non - zero limit behaviour for certain bisexual Galton - Watson branching processes with immigration

LIU Xuan

(Sunshine College, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350015, China)

Abstract: We discuss non - zero limit behaviour for a bisexual Galton - Watson branching processes with immigration(BGWBI). First we introduce simply this bisexual Galton - Watson branching processes, then obtain that the BGWBI is irreducible and aperiodic, finally by using relevant conclusions of Markovchain, martingale theory and branching process, non - zero limit behabiour for the BGWBI is investigated.

Keywords: bisexual Galton - Watson branching processes; irreducible; mean growth rate; mating function

Daley 于 1968 年引入两性 Galton - Watson 分支过程[1]，随后的研究不断地对此模型进行修正和扩展[2-4]. 文献[5]研究了模型(1)的灭绝条件，本文在此基础上进一步研究此模型的非零极限行为.

$$\begin{cases} Z_0^* = N^* \geqslant 1,\ (F_{n+1}, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{Z_n^*} (f_{ni}, m_{ni}) + (F_{n+1}^I, M_{n+1}^I),\ Z_{n+1} = L_{Z_n^*}(F_{n+1}, M_{n+1}) \\ Z_{n+1}^* = \phi(Z_{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, i = 0, 1, 2) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\{(f_{ni}, m_{ni})\}_{n\geqslant 0; i\geqslant 1}$ 是一列独立同分布取非负整数值的随机向量；$\{(F_n^I, M_n^I)\}_{n\geqslant 1}$ 是一列独立同分布且与 $\{(f_{ni}, m_{ni})\}_{n\geqslant 0; i\geqslant 1}$ 独立并取非负整数值的随机向量；$\{L_k(x, y)\}_{k\geqslant 0}$ 是 $R^+ \times R^+$ 上的一列非负实函数，在 $Z^+ \times Z^+$ 上取非负整数值，称为配对函数；$\phi(x)$ 是 R^+ 上的非负实函数，$\phi(0) = 0$，$\phi(k) \in Z_0^+(Z_0^+ = Z^+ - \{0\})$，$k \in Z_0^+$. $\{(Z_n, F_n, M_n)\}_{n\geqslant 1}$，$\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$，$\{Z_n^*\}_{n\geqslant 0}$ 都是齐次马尔可夫链. 此模型是动物繁衍过程的一种描述. 依实际意义可设配对函数满足：对每一个 $k \in Z^+$，$L_k(x, y)$ 是一上可加函数，即对 $n \geqslant 2$，有：

$$L_k\left(\sum_{i=1}^n x_i,\ \sum_{i=1}^n y_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n L_k(x_i, y_i),\ x_i, y_i \in R^+ \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

定义 1 对每一正整数 k，若 $r_k^* = k^{-1}E[\ Z_{n+1}^* \mid Z_n^* = k]$，称 r_k^* 为第 n 代配对单元的平均增长率.

令 S^* 表示 $\{Z_n^*\}_n$ 的状态空间，$k_0 = \inf\{k: P[\phi \circ L_1(F_1^I, M_1^I) = k] > 0\}$.

引理 1 若 $E[\phi \circ L_1(f_{01}, m_{01})] > 0$，$E[\phi \circ L_1(F_1^I, M_1^I)] > 0$，$\phi$ 上可加，那么对任意的 $t \in S^*$，存在 $s \in S^*$，$s > t$ 使得 k_0 可达 s.

收稿日期：2012 - 06 - 19

通讯作者：刘宣(1982 -)，讲师，E - mail：786757195@ qq. com.

证明　因为 $E[\phi\circ L_1(f_{01},m_{01})]>0$，$E[\phi\circ L_1(F_1^I,M_1^I)]>0$，因此存在正整数 $i',j',\xi,\eta\in S^*$，使得 $\phi\circ L_1(i',j')$，$\phi\circ L_1(\xi,\eta)>0$. 不失一般性，不妨设 $k_0=\phi\circ L_1(\xi,\eta)$. 定义序列 $\{(x_n,y_n)\}_n$，$\{k_n\}_n$ 如下：

$$(x_0,y_0)=(\xi,\eta),\ (x_{n+1},y_{n+1})=(i',j')k_n+(\xi,\eta),\ k_{n+1}=\phi\circ L_{k_n}(x_{n+1},y_{n+1})$$

考虑到 $\phi\circ L_{k_n}$ 是上可加的，$\{k_n\}_n$ 是一严格单调增加正整数序列. 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=\infty$. 令 $P_{i'j'}=P(f_{01}=i',m_{01}=j')$，$q_{\xi\eta}=P(F_1^I=\xi,M_1^I=\eta)$. 可证对任意的 $n\in Z^+$，k_0 可达 k_n. 实际上，对任意的 $m\in Z^+$，有：

$$P[Z_{m+n}^*=k_n|Z_m^*=k_0]\geqslant\prod_{l=1}^{n}P[Z_{m+l}^*=k_l|Z_{m+l-1}^*=k_{l-1}]=\prod_{l=1}^{n}P[Z_1^*=k_l|Z_0^*=k_{l-1}]$$

$$=\prod_{l=1}^{n}P\left[\phi\circ L_{k_{l-1}}\left(\sum_{i=1}^{k_{l-1}}(f_{0i},m_{0i})+(F_1^I,M_1^I)\right)=k_l\right]$$

$$\geqslant\prod_{l=1}^{n}P[(f_{0i},m_{0i})=(i',j'),i=1,2,\cdots k_{l-1},(F_1^I,M_1^I)=(\xi,\eta)]$$

$$\geqslant\prod_{l=1}^{n}\prod_{i=1}^{k_{l-1}}P((f_{0i},m_{0i})=(i',j'))\cdot P((F_1^I,M_1^I)=(\xi,\eta))$$

$$\geqslant\prod_{l=1}^{n}((P_{i'j'})^{k_{l-1}}\cdot q_{\xi\eta})=(P_{i'j'})^{\sum_{l=1}^{n}k_{l-1}}\cdot(q_{\xi\eta})^n>0$$

定理 1　若 $E[\phi\circ L_1(f_{01},m_{01})]>0$，$E[\phi\circ L_1(F_1^I,M_1^I)]>0$，$P_{00}>0$，$\phi$ 上可加，那么：① 对任意的 $t\in S^*$ 可一步到达 k_0. ② 若某一状态 t 可达另一状态 u，那么 k_0 也可达状态 u.

证明　1）显然存在正整数 ξ,η，使得 $q_{\xi\eta}>0$，$\phi\circ L_1(\xi,\eta)>0$. 不妨设 $k_0=\phi\circ L_1(\xi,\eta)$，于是有：

$$P\left[Z_1^*=k_0|Z_0^*=t\right]P\left[\phi\circ L_1\left(\sum_{l=1}^{t}(f_{1l},m_{1l})+(F_1^I,M_1^I)\right)=k_0\right]\geqslant(P_{00})^t\cdot q_{\xi\eta}>0$$

2）设 t 可达 u，那么存在正整数 n，使得 $P[Z_n^*=k_0|Z_0^*=t]>0$. 由引理 1 知，存在 $s\in S^*$，$s>t$，使得 k_0 可达 s. 另外有

$$P\left[Z_n^*=u|Z_0^*=s\right]=\sum_{v\in S^*}P\left[Z_n^*=u|Z_1^*=v\right]\cdot P\left[Z_1^*=v|Z_0^*=s\right]$$

因此可知

$$P\left[Z_1^*=v|Z_0^*=s\right]=P\left[\phi\circ L_1\left(\sum_{i=1}^{t}(f_{1l},m_{1l})+\sum_{l=t+1}^{s-t}(f_{1l},m_{1l})+(F_1^I,M_1^I)\right)=v\right]$$

$$\geqslant P\left[Z_1^*=v|Z_0^*=t\right]\cdot(P_{00})^{s-t}$$

由上易得

$$P\left[Z_n^*=u|Z_0^*=s\right]\geqslant(P_{00})^{s-t}\cdot\sum_{v\in S^*}P\left[Z_n^*=u|Z_1^*=v\right]\cdot P\left[Z_1^*=v|Z_0^*=t\right]$$

$$=(P_{00})^{s-t}\cdot P\left[Z_n^*=u|Z_0^*=t\right]>0$$

注 1　由定理 1 可知，S^* 仅由一本质非周期类（k_0 类）和一些非本质状态（一步可达 k_0）构成，因此，$\{Z_n^*\}_n$ 是一个不可约非周期的马尔可夫链.

注 2　对于下临界的情况，由文献[6]知，在一定条件下，$\{Z_n^*\}_n$ 几乎必然收敛到 0. 下面将证明：在某些假设下，$\{Z_n^*\}_n$ 会依分布收敛到一个非零的随机变量.

引理 2　记 $\{X_n\}_{n\geqslant0}$ 为一个平稳不可约马尔可夫链，其所有状态均为非负整数. 假设对任意的 $n\in Z^+$，$M>0$，有 $E[X_n|X_0=k_0]\leqslant M$，其中 k_0 是最小的本质状态，那么 $\{X_n\}_{n\geqslant0}$ 是正常返的.

证明　令 $P_{k_0k_0}^{(n)}$ 表示从 k_0 到 k_0 的 n 步转移概率，设 k_0 不是正常返状态，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{k_0k_0}^{(n)}=0$. 由于此链是不可约的，所以 $\lim\limits_{nn\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{M}P_{k_0i}^{(n)}=0$. 因此，可得：

$$\limsup_{n\to\infty}E\left[X_n|X_0=k_0\right]\geqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=M+1}^{\infty}i\cdot P_{k_0i}^{(n)}\geqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=M+1}^{\infty}(M+1)\cdot P_{k_0i}^{(n)}$$

$$= (M+1)\cdot \limsup_{n\to\infty}\left(1-\sum_{i=0}^{M}P_{k_0 i}^{(n)}\right) = (M+1)$$

这与 $E[X_n|X_0=k_0]\leqslant M$ 矛盾，引理得证.

定理 2 若 $E[\phi\circ L_1(f_{01},m_{01})]>0$，$E[\phi\circ L_1(F_1^I,M_1^I)]>0$，$P_{00}>0$，$\phi$ 上可加，$\limsup_{k\to\infty} r_k^*<1$，那么 $\{Z_n^*\}_{n\geqslant 0}$ 依分布收敛到一个取值为正，有限非零的随机变量 Z^*.

证明 由定理 1 知，$\{Z_n^*\}_{n\geqslant 0}$ 是一个不可约马尔可夫链. k_0 同引理 1 中的定义，易知 $P(Z_n^*\geqslant k_0)=1$，$n=1,2,\cdots$. 因此，若 k^* 是本质状态，那么 $k^*\geqslant k_0$. 由引理 2，要证 $\{Z_n^*\}_{n\geqslant 0}$ 的正常返性，只需证 $\limsup_{k\to\infty} E[Z_{n+1}^*|Z_n^*=k_0]$ 是有限的.

设 $k_1>0$，$r'<1$，并使得对任意的 $k>k_1$，有 $r_k^*<r'$. 令 $C=\max_{0\leqslant k\leqslant k_1}E[Z_{n+1}^*|Z_n^*=k]$，那么 $E[Z_{n+1}^*|Z_n^*]\leqslant r'\cdot Z_n^*+C$. a. s. 因此

$$\limsup_{k\to\infty} E\left[Z_{n+1}^*|Z_n^*=k_0\right] = \limsup_{k\to\infty} E\left[E\left[Z_{n+1}^*|Z_n^*\right]\Big|Z_0^*=k_0\right]$$

$$\leqslant r'\limsup_{n\to\infty} E\left[Z_n^*|Z_0^*=k_0\right]+C$$

于是由上可得 $\limsup_{n\to\infty} E[Z_{n+1}^*|Z_0^*=k_0]\leqslant(1-r')^{-1}\cdot C<\infty$. 再由马尔可夫链的理论知，$\{Z_n^*\}_{n\geqslant 0}$ 依分布收敛到一取值为正，有限非零的随机变量，设为 Z^*，其概率分布即为相应的平稳分布.

推论 1 令 $\mu=\left(E\left[f_{01}\right],E\left[m_{01}\right]\right)$，$\mu^I=\left(E\left[F_1^I\right],E\left[M_1^I\right]\right)$，则在定理 2 条件下，可得序列 $\left\{E\left[\left(F_n^*,M_n^*\right)\Big|Z_{n-1}^*\right]\right\}_{n\geqslant 1}$ 依分布收敛到 $Z^*\mu+\mu^I$.

证明 当 $n\in Z_0^+$ 时，有 $E\left[\left(F_n^*,M_n^*\right)\Big|Z_{n-1}^*\right]=Z_{n-1}^*\mu+\mu^I$，a. s.，再由定理 2 得证.

下面考查序列 $\{W_n\}_{n\geqslant 0}$ 的极限，其中 $W_n=(r^*)^{-n}Z_n^*$.

定理 3 序列 $\{W_n\}_{n\geqslant 0}$ 几乎必然收敛到一个非负有限的随机变量 W.

证明 若能证明序列 $\{W_n\}_{n\geqslant 0}$ 关于 σ 代数 $\mathscr{F}_n=\sigma(Z_0^*,\cdots,Z_n^*)$ 是一非负上鞅，那么结论显然成立. 考虑到 $r^*=\sup_{N>0} r_N^*$，有

$$E\left[W_{n+1}|\mathscr{F}_n\right]=(r^*)^{-(n+1)}E\left[Z_{n+1}^*|Z_n^*\right]=(r^*)^{-(n+1)}Z_n^*r_{Z_n^*}^*$$

$$\leqslant(r^*)^{-(n+1)}Z_n^*(r^*)=(r^*)^{-n}Z_n^*=W_n\quad \text{a. s.}$$

因此得 $\{W_n\}_{n\geqslant 0}$ 几乎必然收敛到一极限，设为 W，且 $P(0\leqslant W<\infty)=1$.

接下来讨论序列 $\left\{(r^*)^{-n}\overline{Z}_n^*\right\}_{n\geqslant 0}$ 的极限，其中 $\overline{Z}_n^*=\sum_{i=0}^{n}Z_i^*$.

定理 4 若 $r^*>1$，那么序列 $\left\{(r^*)^{-n}\overline{Z}_n^*\right\}_{n\geqslant 0}$ 几乎必然收敛到 $(r^*)(r^*-1)^{-1}W$.

证明 由于

$$\frac{\overline{Z}_n^*}{(r^*)^n}=\left(\frac{\sum_{k=0}^{n}(r^*)^k}{(r^*)^n}\right)\left(\frac{\sum_{k=0}^{n}Z_n^*(r^*)^{-k}(r^*)^k}{\sum_{k=0}^{n}(r^*)^k}\right)$$

再由 $r^*>1$ 及 Toeplitz 引理[6] 可得，当 $n\to\infty$ 时，有：

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(r^*)^k}{(r^*)^n}\to\frac{r^*}{r^*-1}\text{ 和 }\frac{\sum_{k=0}^{n}Z_n^*(r^*)^{-k}(r^*)^k}{\sum_{k=0}^{n}(r^*)^k}\to W$$

证毕.

(转第 1001 页)

[2] Sen S, Senguttuvan R, Chatterjee A. Concurrent PAR and power amplifier adaptation for power efficient operation of WiMAX OFDM transmitters[C]//IEEE Radio and Wireless Symposium. Orlando: [s. n.], 2008: 21 – 24.
[3] Han S H, Lee J H. PAPR reduction of OFDM signals using a reduced complexity PTS technique[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2004, 11(11): 887 – 890.
[4] Breiling M, Muller – Weinfurtner S H, Huber J B. SLM peak power reduction without explicit side information[J]. IEEE Communications Letters, 2001, 5(6): 239 – 241.
[5] Tellado J. Peak to average power reduction for multicarrier modulation[D]. Stanford: Stanford University, 2000.
[6] Tellado J, Ciofi J M. PAR reduction in multicarrier transmission systems[R]// Washington DC: ANSI T1E1.4 Technical Subcommittee, 1997.
[7] Chong C V, Tarokh V. A simple encodable/decodable OFDM QPSK code with low peak – to – mean envelope power ration[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 3 025 – 3 029.
[8] Krongold B S, Jones D L. PAR reduction in OFDM via active constellation extension[J]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2003, 49(3): 258 – 268.
[9] Sperlich R, Park Y, Copeland G, *et al*. Power amplifier linearization with digital pre – distortion and crest factor reduction [C]//Microwave Symposium Digest, 2004 IEEE MTT – S International. Fort Worth: [s. n.], 2004(2): 669 – 672.
[10] Gilabert P L, Gadringer M E, Montoro G, *et al*. An efficient combination of digital predistortion and OFDM clipping for power amplifiers[J]. International Journal of RF and Microwave Computer – Aided Engineering, 2009, 19(5): 583 – 591.
[11] Armstrong J. Peak – to – average power reduction for OFDM by repeated clipping and frequency domain filtering[J]. IEEE Electronics Letters, 2002, 38(5): 246 – 247.
[12] Kimura S, Nakamura T, Saito M, *et al*. PAR reduction for OFDM signals based on deep clipping[C]// 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing. Malta: [s. n.], 2008: 911 – 916.
[13] Rapp C. Effects of HPA – nonlinearity on 4 – DPSK – OFDM signal for a digital sound broadcasting system[C]//2nd European Conference on Satellite Communications. Liege Belgium: [s. n.], 1991: 179 – 184.
[14] Wright A S, Durtler W G. Experimental performance of an adaptive digital linearized power amplifier[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 1992, 41(4): 395 – 400.
[15] GB 20600 – 2006　数字电视地面广播传输系统帧结构、信道编码和调制[S].

（责任编辑：沈芸）

（接第 974 页）

参考文献：

[1] Daley D J. Extinction conditions for certain bisexual Galton – Watson branching processes[J]. Z Wahrscheinlichkeitsth, 1968, 9: 315 – 322.
[2] Gonzalez M, Molina M, Mota M. Limit behaviour for a subcritical bisexual Galton – Watson branching process with immigration [J]. Statist Probab Lett, 2000, 49: 19 – 24.
[3] Molina M, Mota M, Ramos A. Bisexual Galton – Watson branching process with population – size dependent mating[J]. J Appl Probab, 2002, 39: 479 – 490.
[4] Xing Y, Wang Y. On the extinction of one class of population – size – dependent bisexual branching processes[J]. J Appl Probab, 2005, 42: 175 – 184.
[5] 刘宣. 一类带移民两性分支过程的灭绝条件[J]. 福州大学学报：自然科学版, 2011, 39(4):493 – 496.
[6] 严士健，王隽骧，刘秀芳. 概率论基础[M]. 北京：科学出版社, 1999.

（责任编辑：郑美莺）