文章编号: 1000 - 2243 (2008) S0 - S125 - 05

# 一类不确定切换系统的鲁棒 $H_\infty$ 动态输出反馈控制器设计

王 美, 张霄力

(厦门大学自动化系, 福建 厦门 361005)

**摘要**: 研究了一类具有未知时变但有界的结构不确定性和输入通道不确定性的切换系统的鲁棒 $H_\infty$ 动态输出反馈控制器设计问题. 利用完备性条件和共同李亚谱诺夫函数方法, 设计了相应子系统的 $H_\infty$ 动态输出反馈控制器和相应的切换策略, 得到了切换系统动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$ 控制器存在的充分条件. 采用变量替代法, 将非线性矩阵不等式转化为一组易于求解的线性矩阵不等式 (LMIs). 最后通过仿真例子表明系统在所设计的 $H_\infty$ 控制器作用下得到的闭环系统, 在相应的切换策略下, 满足鲁棒 $H_\infty$ 性能.

**关键词**: 不确定切换系统; 完备性; 鲁棒 $H_\infty$ 控制; 输出反馈; 线性矩阵不等式

**中图分类号**: TP311. 13　　**文献标识码**: A

## Robust $H_\infty$ dynamical output feedback design for a class of switched systems with uncertainties

WANG Mei, ZHANG Xiao - li

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

**Abstract:** The problem of robust $H_\infty$ dynamical output feedback design for a class of switched systems with time - varying and unknown but norm - bounded uncertainties in states as well as inputs is investigated. Based on the completeness condition and the common Lyapunov function approach, both $H_\infty$ dynamical output feedback controllers of subsystems and switching strategy are designed. A sufficient condition for the existence of robust $H_\infty$ dynamical output feedback controllers for switched systems is obtained. By using the variable substitute method, the nonlinear matrix inequalities are changed into linear matrix inequalities (LMIs) which are easily solved. Finally, the simulation shows that the closed - loop system with the $H_\infty$ controllers designed in the paper satisfies robust $H_\infty$ performance under the designed switching strategy.

**Keywords:** uncertain switched system; completeness; robust $H_\infty$ control; output feedback; LMIs

切换系统是一类重要的混杂系统, 它由多个子系统以及作用在其中的切换规则构成. 文献 [1], [2] 综述了近几年来对切换系统在稳定性分析与控制设计方面的研究成果, 并提出了整个切换系统存在共同 Lyapunov函数是其在任意切换策略下渐近稳定的充要条件, 同时提出利用凸组合技术研究切换系统的稳定性, 他们均是采用状态反馈或静态输出反馈来研究切换系统的稳定性和设计问题. 在许多实际问题中, 如果用输出反馈能够达到闭环系统的性能要求, 那么选择输出反馈的控制方式更具有可行性. 因此, 动态输出反馈控制问题的研究更具有实际意义. 另一方面, 随着线性系统 $H_\infty$ 控制理论的发展与完善, $H_\infty$ 控制已经成为控制理论研究中最为热门的领域之一. 与此同时, 对切换系统 $H_\infty$ 控制的研究刚刚起步, 文献 [3] 研究了一类不确定切换系统具有 $H_\infty$ 性能指标的鲁棒镇定问题, 目前对不确定切换系统的动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$ 控制的研究成果尚不多见.

本文研究了一类具有结构不确定性和输入通道不确定性的切换系统的鲁棒 $H_\infty$ 动态输出反馈控制问题, 利用完备性条件和共同李亚谱诺夫函数方法, 设计了系统的 $H_\infty$ 动态输出反馈控制器及相应的切换策略, 得到了切换系统动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$ 控制的充分条件和控制器的设计算法, 并通过仿真实例验证了结论的有效性.

收稿日期: 2008 - 06 - 13
作者简介: 王 美 (1984 - ), 女, 硕士研究生.

## 1 问题描述

考虑如下不确定切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_\sigma + \Delta A_\sigma)x(t) + (B_{1\sigma} + \Delta B_\sigma)u(t) + B_{2\sigma}w(t) \\ z(t) = C_{1\sigma}x(t) + D_\sigma u(t) \\ y(t) = C_{2\sigma}x(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是状态向量, $u(t) \in R^m$ 是控制输入向量, $w(t) \in R^p$ 是外部扰动, 是不确定的具有有限能量, 即 $w \in L_2[0, \infty)$, $z(t) \in R^q$ 为受控输出向量, $y(t) \in R^l$ 是测量输出向量, $A_\sigma$, $B_{\sigma 1}$, $B_{2\sigma}$, $C_{1\sigma}$, $C_{2\sigma}$, $D_\sigma$ 是具有适当维数的定常矩阵; $\Delta A_\sigma$、$\Delta B_\sigma$ 是系统矩阵 $A_\sigma$、$B_{1\sigma}$ 的摄动或系统模型中参数的不确定矩阵; $\sigma(t): [0, +\infty] \to W = \{1, 2, \cdots, N\}$ 是被设计的切换信号, 它是一个依赖于时间 $t$ 或状态 $x$ 的分段常值函数, 当 $\sigma(t) = i$, $i \in W$ 时, 表示系统的第 $i$ 个子系统被激活.

为了得到所需的结果, 需要给出如下假设和完备性概念:

**假设 1** $[\Delta A_i, \Delta B_i] = M_i F_i(t)[G_i^1, G_i^2]$, 其中: $M_i$、$G_i^1$、$G_i^2$ 是具有适当维数的已知常数矩阵, $F_i(t)$ 是未知函数矩阵, 且满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leq I$.

**定义 1**[4] 若存在对称矩阵集合 $\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_m\}$, 对于任意的 $x \in R^n$, 存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得 $x^{\mathrm{T}}Z_i x \leq 0$ 成立, 则称 $\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_m\}$ 是完备的; 如果对于任意的 $x \in R^n/\{0\}$, 存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $x^{\mathrm{T}}Z_i x < 0$ 成立, 则称 $\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_m\}$ 是严格完备的.

本文的控制目标为: 对于给定的正实数 $\gamma$, 设计系统 (1) 中各子系统 $H_\infty$ 动态输出反馈控制器 $u = K_\sigma(s)y$, 其状态空间形式如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{K\sigma}\hat{x}(t) + B_{K\sigma}y(t) \\ u(t) = C_{K\sigma}\hat{x}(t) + D_{K\sigma}y(t) \end{cases} \tag{2}$$

以及切换规则 $\sigma(t): [0, +\infty] \to W = \{1, 2, \cdots, N\}$, 使得闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_\sigma + \bar{M}_\sigma F_\sigma \bar{G}_\sigma)\bar{x}(t) + \bar{B}_\sigma w \\ z(t) = \bar{C}_\sigma \bar{x}(t) \end{cases} \tag{3}$$

满足如下鲁棒 $H_\infty$ 性能:

①当外部干扰 $w = 0$ 时, 闭环系统是渐近稳定的;

②对于给定的 $\gamma > 0$, 从扰动输入 $w$ 到受控输出 $z$ 的闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 $H_\infty$ 范数小于 $\gamma$. 其中: $\hat{x} \in R^{n_k}$ 是控制器的状态, $A_{K\sigma}$、$B_{K\sigma}$、$C_{K\sigma}$、$D_{K\sigma}$ 是待定的控制器参数矩阵.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_\sigma = \begin{bmatrix} A_\sigma + B_{1\sigma}D_{K\sigma}C_{2\sigma} & B_{1\sigma}C_{K\sigma} \\ B_{K\sigma}C_{2\sigma} & A_{K\sigma} \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_\sigma = \begin{bmatrix} M_\sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_\sigma = \begin{bmatrix} A_{K\sigma} & B_{K\sigma} \\ C_{K\sigma} & D_{K\sigma} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_\sigma = \begin{bmatrix} B_{2\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_\sigma = [G_\sigma^1 + G_\sigma^2 D_{K\sigma}C_{2\sigma} \quad G_\sigma^2 C_{K\sigma}], \quad \bar{C}_\sigma = [C_{1\sigma} + D_\sigma D_{K\sigma}C_{2i} \quad D_\sigma C_{K\sigma}]$$

## 2 主要结果

**引理 1**[5] 对任意具有适当维数的矩阵 $X$, $Y$ 及实数 $\varepsilon > 0$, 都有 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leq \varepsilon X^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\varepsilon}Y^{\mathrm{T}}Y$.

**引理 2**[6] 存在正定对称矩阵 $P$ 使之满 $P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix}$ 的充要条件是 $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$, 其中: $X, Y \in R^{n \times n}$ 是对称矩阵, $*$ 表示任意可能的矩阵.

**定理 1** 若闭环系统 (3) 满足假设 1, 并且对于任意给定的正数 $\gamma$, 如果存在对称矩阵 $P > 0$, 及常数 $\beta > 0$ 满足矩阵集合 $Z_i$ 是严格完备的,

$$Z_i = P\bar{A}_i + \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P + \beta P\bar{M}_i\bar{M}_i^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}\bar{G}_i^{\mathrm{T}}\bar{G}_i + \frac{1}{\gamma^2}P\bar{B}_i\bar{B}_i^{\mathrm{T}}P + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i \tag{4}$$

则存在子控制器和切换规则使系统 (3)满足鲁棒 $H_\infty$性能 ①和性能 ②.

相应的子控制器可取为 $u = K_i(s)y$, 切换规则可取为:

$$\sigma(\bar{x}(t)) = i = \arg\{\min_j \bar{x}^{\mathrm{T}} Z_j \bar{x} < 0\} \tag{5}$$

其中, 函数 $\arg(\cdot)$表示满足括号内表达式条件的下标值.

证明 对闭环系统 (3)取 Lyapunov函数 $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^{\mathrm{T}}(t)P\bar{x}(t)$, 其中 $P$为满足式 (4)的正定矩阵, 则 $V(\bar{x}(t))$沿闭环系统 (3) 轨迹的导数为:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}(t)) &= \dot{\bar{x}}^{\mathrm{T}}(t)P\bar{x}(t) + \bar{x}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\bar{x}}(t)\\ &= \bar{x}^{\mathrm{T}}(P\bar{A}_i + \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P + P\bar{M}_iF_i\bar{G}_i) + \bar{G}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}\bar{M}_i^{\mathrm{T}}P)\bar{x} + w^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}P\bar{x} + \bar{x}^{\mathrm{T}}P\bar{B}_iw\end{aligned}$$

由假设 1和引理 1, 有:

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \le \bar{x}^{\mathrm{T}}(\bar{A}_i^{\mathrm{T}}P + P\bar{A}_i + \beta P\bar{M}_i\bar{M}_i^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}\bar{G}_i^{\mathrm{T}}\bar{G}_i + \frac{1}{\gamma^2}P\bar{B}_i\bar{B}_i^{\mathrm{T}}P)\bar{x} + \gamma^2 w^{\mathrm{T}}w \tag{6}$$

①当 $w = 0$时, 根据式 (6) 和矩阵集合 $Z_i$的严格完备性,有 $\dot{V}(\bar{x}(t)) < 0$. 从而当外部扰动输入 $w = 0$时, 切换系统 (3)在切换规则 (5)的作用下是渐进稳定的.

②由式 (6)得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\bar{x}(t)) + z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}w \le \bar{x}^{\mathrm{T}}(\bar{A}_i^{\mathrm{T}}P + P\bar{A}_i + \beta P\bar{M}_i\bar{M}_i^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}\bar{G}_i^{\mathrm{T}}\bar{G}_i + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i + \frac{1}{\gamma^2}P\bar{B}_i\bar{B}_i^{\mathrm{T}}P)\bar{x}\\ &= \bar{x}^{\mathrm{T}}Z_i\bar{x} \qquad (\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\})\end{aligned}$$

根据矩阵集合 $Z_i$的严格完备性并且由 $H_\infty$理论关于性能指标的等价条件, 可知切换系统 (3) 的 $H_\infty$范数小于 $\gamma$.

根据 Schur补引理, 条件 (4)可以等价转化为:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P + P\bar{A}_i & P\bar{M}_i & \bar{G}_i^{\mathrm{T}} & \bar{C}_i^{\mathrm{T}} & P\bar{B}_i \\ \bar{M}_i^{\mathrm{T}}P & -\frac{1}{\beta}I & 0 & 0 & 0 \\ \bar{G}_i & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ \bar{C}_i & 0 & 0 & -I & 0 \\ \bar{B}_i^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

在矩阵不等式 (7)中, 由于 $\bar{A}_i$、$\bar{B}_i$、$\bar{C}_i$、$\bar{G}_i$依赖于未知的控制器参数, 因此, 矩阵变量 $P$和控制器参数矩阵 $A_{Ki}$、$B_{Ki}$、$C_{Ki}$、$D_{Ki}$以非线性的方式出现, 本文将采用基于线性矩阵不等式处理的输出反馈 $H_\infty$控制器设计方法 ——变量替代法[7]将式 (7)转化为易于求解的线性矩阵不等式.

由引理 2知, 将矩阵 $P$和它的逆矩阵进行如下分块: $P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix}$, 其中 $X, Y \in R^{n\times n}$是对称矩阵. 由 $PP^{-1} = I$可得 $P\begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, 若定义 $F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 则 $PF_1 = F_2$. 为了找到一个适当的变量替换将矩阵不等式 (7) 转换成一个等价的线性矩阵不等式, 定义以下的变量替换公式:

$$\begin{cases} \hat{A}_i = Y(A_i + B_{1i}D_{Ki}C_{2i})X + NB_{Ki}C_{2i}X + YB_{1i}C_{Ki}M^{\mathrm{T}} + NA_{Ki}M^{\mathrm{T}} \\ \hat{B}_i = YB_{1i}D_{Ki} + NB_{Ki} \\ \hat{C}_i = D_{Ki}C_{2i}X + C_{Ki}M^{\mathrm{T}} \\ \hat{D}_i = D_{Ki} \end{cases} \qquad (\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}) \tag{8}$$

对不等式 (7)左边的矩阵分别左乘矩阵 $\mathrm{diag}\{F_1^{\mathrm{T}}, I, I, I, I\}$和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{F_1, I, I, I, I\}$并利用变量替换公式 (8)和引理 2, 可得矩阵不等式 (7)等价于下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & M_i & \phi_3 & \phi_4 & B_{2i} \\ \phi_2^{\mathrm{T}} & \Phi_1 & YM_i & \Phi_2 & \Phi_3 & YB_{2i} \\ M_i^{\mathrm{T}} & M_i^{\mathrm{T}}Y & -\frac{1}{\beta}I & 0 & 0 & 0 \\ \phi_3^{\mathrm{T}} & \Phi_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ \phi_4^{\mathrm{T}} & \Phi_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & 0 \\ B_{2i}^{\mathrm{T}} & B_{2i}^{\mathrm{T}}Y & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad (\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}) \tag{9}$$

和

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

其中:

$$\phi_1 = A_iX + XA_i^{\mathrm{T}} + B_{1i}\hat{C}_i + (B_{1i}\hat{C}_i)^{\mathrm{T}};\ \phi_2 = \hat{A}_i^{\mathrm{T}} + A_i + B_{1i}\hat{D}_iC_{2i};\ \phi_3 = (G_i^1X + G_i^2C_i)^{\mathrm{T}}$$

$$\phi_4 = (C_{1i}X + D_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}};\ \Phi_1 = A_i^{\mathrm{T}}Y + YA_i + \hat{B}_iC_{2i} + (\hat{B}_i + C_{2i})^{\mathrm{T}};\ \Phi_2 = (G_i^1 + G_i^2\hat{D}_iC_{2i})^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi_3 = (C_{1i} + D_i\hat{D}_iC_{2i})^{\mathrm{T}}$$

控制器参数矩阵可以通过以下的公式得到:

$$\begin{cases} D_{Ki} = \hat{D} \\ C_{Ki} = (\hat{C}_i - D_{Ki}C_{2i}X)(M^{\mathrm{T}})^{-1} \\ B_{Ki} = N^{-1}(\hat{B}_i - YB_{1i}D_{Ki}) \\ A_{Ki} = N^{-1}\left[\hat{A}_i - Y(A_i + B_{1i}D_{Ki}C_{2i})X\right](M^{\mathrm{T}})^{-1} - B_{Ki}C_{2i}X(M^{\mathrm{T}})^{-1} - N^{-1}YB_{1i}C_{Ki} \end{cases} \qquad (\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N)\}) \tag{11}$$

总结以上的讨论,得到下面的定理.

**定理 2** 对于任意给定的常数 $\gamma > 0$,系统 (1)存在一个 $H_\infty$动态输出反馈控制器,如果存在对称矩阵 $X, Y \in R^{n\times n}$,矩阵 $\hat{A}_i$、$\hat{B}_i$、$\hat{C}_i$、$\hat{D}_i$及常数 $\beta > 0$,在假设 1成立的条件下,使得下式均成立:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & M_i & \phi_3 & \phi_4 & B_{2i} \\ \phi_2^{\mathrm{T}} & \Phi_1 & YM_i & \Phi_2 & \Phi_3 & YB_{2i} \\ M_i^{\mathrm{T}} & M_i^{\mathrm{T}}Y & -\frac{1}{\beta}I & 0 & 0 & 0 \\ \phi_3^{\mathrm{T}} & \Phi_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ \phi_4^{\mathrm{T}} & \Phi_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & 0 \\ B_{2i}^{\mathrm{T}} & B_{2i}^{\mathrm{T}}Y & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \qquad \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{12}$$

则控制器 (2)在切换策略 (5)下能镇定闭环系统 (3),且具有 $H_\infty$鲁棒性能 $\gamma$.

根据以上得到 $H_\infty$的控制器存在的条件,可以按以下步骤设计所需要的输出反馈 $H_\infty$控制器:

①应用求解线性矩阵不等式的 LMI工具箱对定理 2条件式 (12)求解,求出正定对称矩阵 $X$, $Y$和 $\hat{A}_i$、$\hat{B}_i$、$\hat{C}_i$、$\hat{D}_i$;

②通过矩阵 $I - XY$的奇异值分解得到矩阵 $M$和 $N$;

③将得到的 $\hat{A}_i$、$\hat{B}_i$、$\hat{C}_i$、$\hat{D}_i$和 $M$、$N$带入 (11)式,就得到了 $H_\infty$控制器的参数.

## 3 仿真例子

考虑由 2个不确定子系统构成的切换系统 (1),参数如下:

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -50 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -80 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B_{11} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 1.6 & -0.3 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$,

$B_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 0.6\\ 1.2 & 0.4\end{bmatrix}$, $C_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$, $C_{12}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$, $C_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $D_1=\begin{bmatrix}0 & 0.2\end{bmatrix}$, $D_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0\end{bmatrix}$, $M_1=\begin{bmatrix}0.4 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$, $F_1=F_2=\begin{bmatrix}\sin t & 0\\ 0 & \cos t\end{bmatrix}$, $G_1^1=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$, $G_2^1=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$, $G_1^2=\begin{bmatrix}0 & 0.2\\ 0.4 & 0\end{bmatrix}$, $G_2^2=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}\sin t\\ 0\end{bmatrix}$, 取标量 $\beta=1$, $H_\infty$指标参数 $\gamma=1$.

使用本文上述方法得到 $P=\begin{bmatrix}1.6060 & -0.0274 & 0.0083 & -0.1192\\ 0.0274 & 0.6789 & -0.1299 & -0.0076\\ 0.0638 & -0.9980 & 1.6564 & 0.0838\\ -0.9980 & -0.0638 & 0.0913 & 0.7407\end{bmatrix}$, 2个子控制器矩阵分别为:

$$K_1=\begin{bmatrix}-56.3975 & -10.0854 & -2.7703 & 0.5427\\ -14.5534 & -3.6479 & 4.0330 & -0.6146\\ -0.8836 & -4.8225 & -1.3580 & 0.4004\\ 0.3558 & -0.8025 & 0.4004 & -0.0993\end{bmatrix},\quad K_2=\begin{bmatrix}-1.1509 & 8.1778 & 1.7091 & -0.9125\\ 10.3338 & -87.7294 & -2.2073 & 2.0840\\ 0.5253 & -0.4185 & -0.0446 & -0.6387\\ -0.4844 & 0.8810 & -0.6387 & 1.5008\end{bmatrix}$$

设初始状态 $\bar{x}(0)=[1.5\ \ -2.5\ \ 1\ \ -2]^{\mathrm{T}}$, 经验证矩阵集合 $\{Z_1, Z_2\}$是严格完备的, 选取切换策略 $\sigma(\bar{x}(t))=i=\arg\{\min_j \bar{x}^{\mathrm{T}} Z_j \bar{x}<0\}$, $i=1, 2$, 得到系统的状态响应曲线如图 1所示.

图 1中, $x_1$, $x_2$为系统状态, $x_3$, $x_4$为控制器状态. 从图 1可以看出, 由 2个不稳定子系统组成的切换系统在本文设计的输出反馈控制器和切换规则作用下, 经过很短的时间进入稳定状态, 从而验证了所研究方法的正确性和有效性.

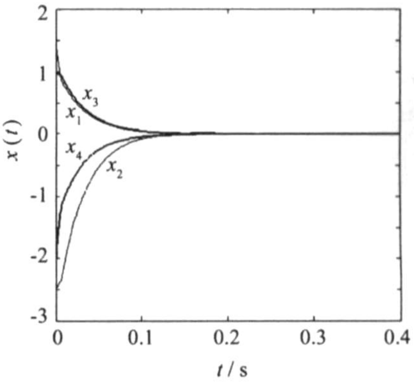


图 1　切换系统的状态响应曲线

Fig 1　The states' respond curves of the switched systems

## 4　结 语

在系统具有未知时变但有界的结构不确定性和输入通道的不确定性的情况下, 利用共同李亚谱诺夫函数方法和完备性条件, 设计了系统的 $H_\infty$动态输出反馈控制器及相应的切换策略, 得到了切换系统动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$控制的充分条件. 采用变量替代法, 将非线性矩阵不等式转化为易于求解的线性矩阵不等式. 针对 $N=2$时的不确定切换系统进行了仿真计算, 其结果表明, 系统在所设计的 $H_\infty$动态输出反馈控制器作用下得到的闭环系统, 在相应的切换策略下, 满足 $H_\infty$性能.

参考文献:


[1] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59 - 70.

[2] Decarlo R A, Branicky S, Pettersson S, *et al*. Perspectives and results on the stability and stabilization of hybrid systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2000, 88(7): 1 069 - 1 082.

[3] Nie H, Zhao J. Hybrid state feedback $H_\infty$ robust control for a class of linear systems with time - varying norm - bounded uncertainty[C] // Proc of the American Control Conference. Colorado: [s. n. ], 2003, 4: 3 608 - 3 613.

[4] Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, *et al*. Stability results for switched controller systems[J]. Automatica, 1999, 35(4): 553 - 564.

[5] Petersen I R, A stabilization algorithm for a class uncertain linear systems[J]. Systems & Control Letters, 1987, 7(8): 351 - 357.

[6] 刘红霞, 胥布工, 朱学峰, 等. 关联时滞大系统的 $H_\infty$动态输出反馈控制 - LMI方法[J]. 华南理工大学学报, 2001, 29(11): 37 - 41.

[7] 俞 立. 鲁棒控制 - 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.


(责任编辑: 杨 青)