

# 损伤粘弹性正交铺设层合板的非线性振动分析

郑玉芳

(福州大学土木工程学院, 福建 福州 350002)

**摘要:** 研究了考虑横向剪切变形和损伤效应的粘弹性正交铺设层合中厚板的非线性自由振动问题。基于一阶剪切变形理论、应变等效假设和 Boltzmann 叠加原理, 建立了考虑横向剪切变形和损伤效应的粘弹性层合中厚板的非线性自由振动控制方程, 且应用有限差分法、Newmark 法和迭代法进行求解。算例中, 具体讨论了损伤效应、不同跨厚比和长宽比对粘弹性层合板的非线性自由振动幅频响应曲线的影响。

**关键词:** 横向剪切变形; 损伤效应; 粘弹性层合板; 非线性振动

中图分类号: O 345

文献标识码: A

## Nonlinear free vibration for viscoelastic cross-ply laminated plates with damage

ZHENG Yu-fang

(College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China)

**Abstract** The nonlinear free vibration for viscoelastic cross-ply laminated plates under considering transverse shear deformation and damage effect is studied. Based on the Timoshenko-Mindlin theory strain equivalence hypothesis and Boltzmann superposition principle, the nonlinear free vibration governing equations for viscoelastic moderately thick laminated plates with damage are established and solved by the finite difference, Newmark method and iterative method. In the numerical results, the influences of damage effect, various span-thickness ratio and aspect ratio on the nonlinear amplitude-frequency response curves of the viscoelastic laminated plates are discussed.

**Keywords** transverse shear deformation; damage effect; viscoelastic laminated plates; nonlinear vibration

结构在使用过程中, 受到外界激励, 当激励频率接近结构的某一固有频率时, 结构将发生共振, 在工程中, 因为共振而导致结构破坏的事例并不鲜见。同时, 粘弹性复合材料结构在振动过程中将发生损伤, 损伤可以改变结构的振动性能。当损伤增长时, 结构有可能处于共振状态, 而一旦共振出现, 结构内应力水平的提高又将导致损伤增长的加速。因此, 研究考虑损伤效应的粘弹性层合结构的非线性自由振动是一个非常重要的研究课题之一。

Kin 等<sup>[1]</sup>利用有限元法和多尺度法, 讨论了粘弹性复合材料层合板的非线性振动频率; Yu 等<sup>[2]</sup>建立了中间层为粘弹性层的 3 层层合圆板的非线性振动模型, 并讨论了粘弹性对结构非线性振动幅值和频率的影响。关于局部损伤对板静力学行为的影响也有一些报道。Prabhakara<sup>[3, 4]</sup>研究了在面内均布载荷作用下, 结构缺陷对弹性板的振动频率和屈曲临界载荷的影响; Laura<sup>[5]</sup>研究了含损伤环形板线性自由振动频率; Zheng<sup>[6]</sup>讨论了损伤缺陷对粘弹性板分叉和混沌行为的影响。由于复合材料具有明显的蠕变现象和松弛特性, 很有必要研究损伤效应对粘弹性层合结构的非线性自由振动频率的影响。

本文基于一阶剪切变形理论、应变等效原理和 Boltzmann 叠加原理, 建立考虑横向剪切变形和损伤效应的粘弹性正交铺设层合中厚板的非线性自由振动控制方程。粘弹性材料采用标准线性固体形式, 损伤演化方程采用 Kachanov 型的损伤演化形式。具体讨论有关参数对具损伤粘弹性层合板的非线性自由振动幅频响应曲线的影响。

收稿日期: 2006-04-20

作者简介: 郑玉芳(1976-), 女, 博士, 讲师。

基金项目: 福建省青年科技人才创新基金资助项目(2006F3077)

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

## 1 基本方程与求解方法

考虑四边简支正交铺设复合材料层合板, 在  $x$  和  $y$  方向上的长度分别为  $a$  和  $b$ , 板在  $z$  方向厚度为  $h$ , 整体坐标系置于未变形时板的中面。根据 Timoshenko-Mindlin 假定, 板中任一点的应变-位移关系为:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zK_x = u_x + (w_{,x}^2 - 2) + z\varphi_{,x} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zK_y = v_{,y} + (w_{,y}^2 - 2) + z\psi_{,y} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zK_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + z(\varphi_{,y} + \psi_{,x}) \\ \gamma_{xz} = \varphi + w_{,x} \\ \gamma_{yz} = \psi + w_{,y} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $u$ 、 $v$  和  $w$  分别为中面上  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的值;  $\varphi$  和  $\psi$  分别为中面法线绕  $y$  轴和  $x$  轴的转角。

由载荷等效原理, 假设作用在损伤截面上的内力与无损伤时相等, 有效应力  $\tilde{\sigma}$  与 Cauchy 应力  $\sigma$  之间的关系为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_x \\ \tilde{\sigma}_y \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $D_1$  和  $D_2$  为损伤变量, 定义为有效面积的改变量。

由应变等效假设和 Boltzmann 叠加原理<sup>[8]</sup>, 得到含损伤效应的粘弹性层合板的应力-应变关系为:

$$\tilde{\sigma}(t) = Q(0)\varepsilon(t) + \int_0^t Q(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (3)$$

式中:  $Q(0)$  为初始松弛模量;  $Q(t)$  为与时间相关的松弛模量。

由经典层合板理论, 可得到正交铺设层合板的本构关系为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} z dz = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

当忽略体力和面内惯性力的影响时, 层合中厚板的运动控制方程为:

$$\begin{cases} N_{xx} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{yx,x} + N_{yy,y} = 0 \\ Q_{xx} + Q_{yy} + [N_xw_{,x} + N_{xy}w_{,y}]_{,x} + [N_yw_{,x} + N_{yy}w_{,y}]_{,y} = \Omega w_{,tt} \\ M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\rho$  为板单位体积的质量.

将式(4)代入式(5), 同时引入如下的无量纲参数:  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ,  $\lambda = a/b$ ,  $p = \Omega a^2/(t_0^2 E)$ ,  $\tau = t/t_0$ ,  $H = a/h$ ,  $U = au/h^2$ ,  $V = av/h^2$ ,  $W = w/h$ ,  $\Phi = H\varphi$ ,  $\Psi = H\psi$ ,

$$\bar{A}_{ij}(\tau) = A_{ij}(\tau)/h(Eh), \quad \bar{B}_{ij}(\tau) = B_{ij}(\tau)/(Eh^2), \quad \bar{D}_{ij}(\tau) = D_{ij}(\tau)/(Eh^3), \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{A}_{ij}(\tau) = A_{ij}(\tau)/(Eh), \quad (i, j = 4, 5)$$

得到损伤粘弹性复合材料正交铺设层合板的无量纲非线性运动控制方程为:

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{11} \otimes (U_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}) + \bar{A}_{12} \otimes (\lambda V_{,\xi\xi} + \lambda^2 W_{,\eta\xi}) + \bar{B}_{11} \otimes \Phi_{,\xi\xi} + \lambda \bar{B}_{12} \otimes \Psi_{,\xi\eta} + \bar{M}_{66} \otimes (\lambda U_{,\eta\eta} + V_{,\xi\eta} \\ & + \lambda W_{,\eta\xi} + \lambda W_{,\xi\eta}) + \lambda \bar{B}_{66} \otimes (\lambda \Phi_{,\eta\eta} + \Psi_{,\xi\eta}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{66} \otimes (\lambda U_{,\xi\eta} + V_{,\xi\eta} + \lambda W_{,\eta\xi} + \lambda W_{,\xi\eta}) + \bar{B}_{66} \otimes (\lambda \Phi_{,\xi\eta} + \Psi_{,\xi\eta}) + \bar{M}_{12} \otimes (U_{,\xi\eta} + W_{,\xi\eta}) \\ & + \lambda^2 \bar{A}_{22} \otimes (V_{,\eta\eta} + \lambda W_{,\eta\eta}) + \lambda \bar{B}_{12} \otimes \Phi_{,\xi\eta} + \lambda^2 \bar{B}_{22} \otimes \Psi_{,\eta\eta} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & H^2 \bar{A}_{44} \otimes (\Phi_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}) + H^2 \lambda \bar{A}_{55} \otimes (\Psi_{,\eta\eta} + \lambda W_{,\eta\eta}) + [\bar{A}_{11} \otimes (U_{,\xi\xi} + \frac{1}{2} W_{,\xi\xi}^2) + \bar{M}_{12} \otimes (V_{,\eta\eta} + \frac{\lambda}{2} W_{,\eta\eta}^2) \\ & + \bar{B}_{11} \otimes \Phi_{,\xi\xi} + \lambda \bar{B}_{12} \otimes \Psi_{,\eta\eta}] JW_{,\xi\xi} + 2\lambda \bar{A}_{66} \otimes (\lambda U_{,\xi\eta} + V_{,\xi\eta} + \lambda W_{,\xi\eta}) + \bar{B}_{66} \otimes (\lambda \Phi_{,\xi\eta} + \Psi_{,\xi\eta}) JW_{,\xi\eta} + \lambda^2 [\bar{A}_{12} \\ & \otimes (U_{,\xi\xi} + \frac{1}{2} W_{,\xi\xi}^2) + \bar{M}_{22} \otimes (V_{,\eta\eta} + \frac{\lambda}{2} W_{,\eta\eta}^2) + \bar{B}_{12} \otimes \Phi_{,\xi\xi} + \lambda \bar{B}_{22} \otimes \Psi_{,\eta\eta}] JW_{,\eta\eta} = p H^2 W_{,\eta\eta} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{11} \otimes (U_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}) + \lambda \bar{B}_{12} \otimes (V_{,\xi\xi} + \lambda W_{,\eta\xi}) + \bar{D}_{11} \otimes \Phi_{,\xi\xi} + \lambda \bar{D}_{12} \otimes \Psi_{,\xi\eta} + \lambda \bar{B}_{66} \otimes (\lambda U_{,\eta\eta} + V_{,\xi\eta} \\ & + \lambda W_{,\eta\xi} + \lambda W_{,\xi\eta} + \lambda \bar{D}_{66} \otimes (\lambda \Phi_{,\eta\eta} + \Psi_{,\xi\eta})) - H^2 \bar{A}_{44} \otimes (\Phi_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{66} \otimes (\lambda U_{,\xi\eta} + V_{,\xi\eta} + \lambda W_{,\eta\xi} + \lambda W_{,\xi\eta}) + \bar{D}_{66} \otimes (\lambda \Phi_{,\xi\eta} + \Psi_{,\xi\eta}) + \lambda \bar{B}_{12} \otimes (U_{,\xi\eta} + W_{,\xi\eta}) \\ & + \lambda^2 \bar{B}_{22} \otimes (V_{,\eta\eta} + \lambda W_{,\eta\eta}) + \lambda \bar{D}_{12} \otimes \Phi_{,\xi\eta} + \lambda^2 \bar{D}_{22} \otimes \Psi_{,\eta\eta} - H^2 \bar{A}_{55} \otimes (\Psi_{,\eta\eta} + \lambda W_{,\eta\eta}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

考虑四边不可动简支板, 其边界条件为:

$$\begin{aligned} \xi &= \pm \frac{1}{2}, \quad U = V = W = \Psi = M_\xi = 0 \\ \eta &= \pm \frac{1}{2}, \quad U = V = W = \Phi = M_\eta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

在本文中, 应用如下的损伤演化方程<sup>[9]</sup>

$$\frac{dD_i}{d\tau} = \begin{cases} B_i \left( \frac{\sigma_i}{1 - D_i} \right)^{m_i} & (\sigma_i \geq \sigma_{D_i}) \\ 0 & (\sigma_i < \sigma_{D_i}) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

式中:  $B_i$ ,  $m_i$  为材料常数;  $\sigma_{D_i}$  为当  $i$  方向的损伤  $D_i$  开始增长时, 损伤应力的门槛值.

## 2 求解方法

由于荷载和结构对称, 只取  $\frac{1}{4}$  板进行计算. 所考虑的域为  $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}$ , 且将这个域用方形网格分成  $N \times N$  个部分.

为了寻求满足边界条件(11)的非线性运动控制方程(6)~(10)的解, 将无量纲位移函数  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  在空间和时域内离散, 以求其近似解.

在空间上采用有限差分法离散, 对空间坐标的导数以差商代替. 在时间上将  $\tau$  等分为小的时间段  $\Delta\tau$ , 采用 Newmark 法将方程(8)中对时间变量的偏导数项  $W_{,\tau\tau}$  在时间上离散, 利用 Newton-Cotes 数值积分法对方程(6)~(10)中的卷积积分项进行数值积分, 这样, 控制方程(6)~(10)将变成一组以结点位移为未知量的非线性代数方程组, 整个问题采用迭代法求解. 在任一迭代步  $J$  中, 方程和边界条件中的非线性项被线性化, 且写成如下形式:

$$(X \bullet Y)_J = (X)_J \bullet (Y)_{J_p} \quad (13)$$

式中  $(Y)_{J_p}$  是前两次迭代值的均值.

基于 Newmark 法, 方程组中的加速度项可表示为:

$$\begin{cases} (W_{\tau\tau})_J = \frac{4(W_J - W_{J-1})}{(\Delta\tau)^2} - \frac{4(W_{\tau\tau})_{J-1}}{\Delta\tau} - (W_{\tau\tau})_{J-1} \\ (W_{\tau\tau})_J = (W_{\tau\tau})_{J-1} + \frac{1}{2}[(W_{\tau\tau})_{J-1} + (W_{\tau\tau})_J](\Delta\tau) \end{cases} \quad (14)$$

给定一组初始迭代值, 在每一时间步内, 迭代过程持续到相邻两次的计算结果的误差小于 0.01%。在第  $J$  步得到收敛解后, 该迭代步终止, 再进行第  $J+1$  步的计算。对于非线性系统, 考虑到振幅和频率随着时间而变化, 而且损伤也在不断演化, 所以只能选择其中一个周期来分析。因此, 在计算中截取振动的前 20 个周期, 考察第 20 个周期的平均频率和最大振幅之间的关系, 从而得到损伤粘弹性板的非线性自由振动时的幅频响应曲线。

### 3 数值结果与讨论

设每一单层的铺设材料和厚度均相同。材料参数取为<sup>[10]</sup>:  $e_1 = 9.75 + 0.25e^{-\alpha_1\tau}$ ,  $\alpha_1 = 0.022$ ,  $e_2 = 0.32 + 0.68e^{-\alpha_2\tau}$ ,  $\alpha_2 = 0.024$ ,  $v_{12} = 0.4$ ,  $e_{12} = 0.07 + 0.16e^{-\alpha_{12}\tau}$ ,  $\alpha_{12} = 0.026$ ,  $e_{13} = 0.07 + 0.16e^{-\alpha_{13}\tau}$ ,  $\alpha_{13} = 0.026$ ,  $e_{23} = 0.05 + 0.12e^{-\alpha_{23}\tau}$ ,  $\alpha_{23} = 0.026$ ,  $B_1 = 3.7 \times 10^{-12} \text{ MPa}^{-m_1}$ ,  $B_2 = 4.8 \times 10^{-11} \text{ MPa}^{-m_2}$ ,  $m_1 = m_2 = 3$

定义具损伤粘弹性板的无量纲非线性自由振动基频为:

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{h} \sqrt{\rho/E}$$

其中  $\Omega$  为损伤粘弹性板的有量纲非线性自由振动基频。

图 1 中给出了跨厚比  $a/h$  对粘弹性层合方板 ( $0^\circ \backslash 90^\circ \backslash 0^\circ$ ) 非线性自由振动幅频响应曲线的影响。图中实线和虚线分别表示不考虑损伤效应和考虑损伤效应时的计算结果,  $w_{\max}/h$  为板的无量纲最大振幅值(以下类同)。由图 1 可知, 对于给定的振幅, 随着跨厚比  $a/h$  的减小, 即板的厚度变厚, 板的非线性自由振动基频变大; 当板的厚度一定时, 板的非线性自由振动基频随着振幅的增加而增大; 在振幅较小的情况下, 损伤处于孕育阶段, 由损伤引起的频率的降低较小, 两条曲线比较接近, 但随着振幅的增大, 损伤累积的速度加大, 从而导致结构的刚度下降得越大, 其非线性振动基频相对于无损时明显降低; 而且板越厚, 损伤越大, 频率降低得也越多。

图 2 给出了长宽比  $\lambda$  对粘弹性层合板 ( $0^\circ \backslash 90^\circ \backslash 0^\circ$ ) 的非线性自由振动幅频响应曲线的影响。从图 2 可以看出, 对于给定的振幅, 随着长宽比  $\lambda$  的增大, 即板的宽度减小时, 板的非线性自由振动基频变大; 同样地, 在长宽比  $\lambda$  一定时, 随着振幅的加大, 损伤累积加快, 结构的刚度下降越大, 由损伤引起的频率的降低越显著, 而且长宽比越大, 频率下降得越大。

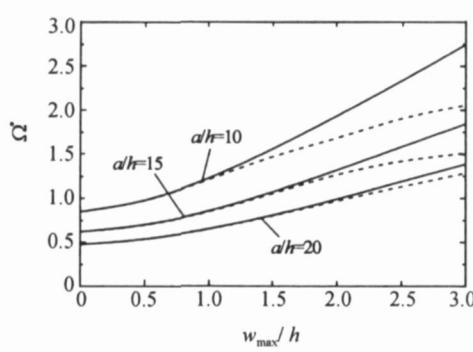


图 1 跨厚比对粘弹性层合板非线性自由振动幅频响应曲线的影响 ( $\lambda = 1$ )

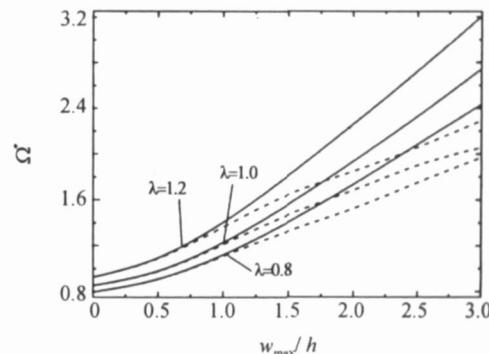


图 2 长宽比对粘弹性层合板非线性自由振动幅频响应曲线的影响 ( $a/h = 10$ )

Fig. 1 Effects of span-thickness ratio on the nonlinear amplitude-frequency curves of viscoelastic laminated plate ( $\lambda = 1$ )

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

Fig. 2 Effects of aspect ratio on the nonlinear amplitude-frequency curves of viscoelastic laminated plate ( $a/h = 10$ )

## 4 结语

研究了考虑横向剪切和损伤效应的粘弹性正交铺设层合中厚板的非线性自由振动问题。数值分析结果表明, 损伤对结构振动频率的影响是不容忽视的。同时, 随着跨厚比的减小或长宽比的增大, 损伤粘弹性层合板的非线性自由振动基频变大。在振幅较小时, 损伤处于孕育阶段, 由损伤引起的频率的变化量较小; 在振幅较大时, 损伤的累积速度加快, 由损伤引起的频率的降低就愈显著。

## 参考文献:

- [1] Kim T W, Kim J H. Non linear vibration of viscoelastic laminated composite plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39: 2857– 2870
- [2] Yu S C, Huang S C. Vibration of a three-layered viscoelastic sandwich circular plate [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, 43: 2215– 2236
- [3] Prabhakara D L, Datta P K. Vibration and static stability characteristics of rectangular plates with a localized flaw [J]. Computers and Structures, 1993, 49: 825– 836
- [4] Prabhakara D L, Datta P K. Parametric instability characteristics of rectangular plates with localized damage subjected to in-plane periodic load [J]. Structural Engineering Review, 1993, 1: 71– 79
- [5] Laura P A A, Gutierrez R H. Transverse vibration of a damaged circular annular plate with a free edge [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 241: 720– 724
- [6] Zheng Y F, Fu Y M. Effect of damage on bifurcation and chaos of viscoelastic plates [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2005, 6: 87– 92
- [7] Zhang W H, Chen Y M, Jin Y. Effects of symmetrisation of net-stress tensor in an isotropic damage models [J]. International Journal of Fracture, 2001, 109: 345– 363
- [8] Pipkin A C. Lectures on viscoelasticity theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1986
- [9] Kachanov L M. Introduction to continuum damage mechanics [M]. New York: Martinus Nijhoff Publishers, 1986
- [10] Chandramani N K, Librescu L. The theory of orthotropic viscoelastic shear deformable composite flat panels and their dynamic stability [J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, 25: 465– 482

(责任编辑: 郑美莺)