

受应力约束的三维弹性体的拓扑优化

刘齐茂¹, 李微²

(1 广西工学院土木建筑工程系, 广西 柳州 545006; 2 东南大学土木工程学院, 江苏 南京 210018)

摘要: 提出一种受应力约束的三维弹性体的拓扑优化方法: 修改的满应力法, 即通过反复迭代修改单元的弹性模量, 使三维弹性体的每个单元均处于一种满应力的状态, 然后删除弹性模量较低的单元, 通过逐渐删除弹性模量较低的单元使单元最大弹性模量逐渐接近于材料实际的弹性模量, 同时单元的最大应力也逐渐接近于材料的许可应力, 从而获得满足应力约束条件的三维弹性体的最优拓扑。同时引入结构描述数组的概念, 很方便地实现单元的重新划分。数值结果显示该方法很有效, 且具有很好的通用性和稳健性。

关键词: 满应力法; 拓扑优化; 三维弹性体; 应力约束

中图分类号: O342

文献标识码: A

Topological optimization of three-dimensional elastic continuum with stress constraints

LU Qi-mao¹, LI Wei²

(1 Department of Civil Construction Engineering Guangxi Institute of Technology, Liuzhou, Guangxi 545006 China; 2 College of Civil Engineering Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210018, China)

Abstract The paper introduces a three-dimensional elastic continuum topological optimization method with stress constraints: an amendatory full stress method, namely, it makes every element of the three-dimensional elastic continuum in a full stress state through amending the element modulus of elasticity repeatedly, then deletes the elements that their modulus of elasticity is small. And the maximum of the element elasticity modulus approaches gradually to the elasticity modulus of material through deleting the element their modulus of elasticity is small. At the same time, the maximum of the element VonMises stress approaches gradually to the allowable stress of material, so the best topology of three-dimensional elastic continuum is gained. The concept of structure represent array is defined, so the next element division of the structure becomes easy. Numerical results illustrate the method is efficiency, robust and universal.

Keywords full stress method; topological optimization; three-dimensional elastic continuum; stress constraints

1985年, Bendsoe M 和 Kuch i N 提出将均匀化方法应用于连续体的结构拓扑优化^[1], 使连续体的拓扑优化研究迅速出现了高潮。但均匀化方法还不能给出带有微观结构的材料的宏观许可应力和微观结构尺寸的关系, 故其求解的问题仅限于给定结构总柔度求重量最轻的结构拓扑或给定对结构若干阶固有频率约束求重量最轻的结构拓扑, 上列问题的对偶问题及其在多工况约束下的上列问题。均匀化方法另一个缺点是求得的最终设计是在整个基结构的区域内连续分布着相对密度介于 0 和 1 之间的多孔介质, 故得到的是一个很不清晰的结构拓扑, 只能提供一种结构的概念化设计方法。为了得到结构的更清晰拓扑, 人们提出了很多拓扑优化算法, 如渐进结构优化法 (简称 ES0 法)^[2, 3]、修改满应力法^[4]、智

收稿日期: 2005-09-05

作者简介: 刘齐茂 (1972-), 男, 硕士, 讲师。

基金项目: 广西省自然科学基金资助项目 (0481007); 广西工学院青年科学基金资助项目 (500204)

能优化算法^[5]等, 他们的数值结果表明这些拓扑优化算法都是很有效的, 但这些方法研究的对象都是平面弹性体或桁架. 当然, 对三维弹性体拓扑优化的研究也有, 如 ICM 法^[6-7], 该方法已成功的应用于 MSC. Patran /Nastran 的二次开发中, 且在工程上容易实现. 本文提出一种受应力约束的三维弹性体的拓扑优化方法: 修改的满应力法. 数值结果显示了该方法稳健性、通用性很好, 是一种有效的三维弹性体拓扑优化算法.

1 结构描述数组的定义及其在网格重新划分中的应用

1.1 结构描述数组的定义

如图 1 所示, 拓扑优化的基结构为一立方体, 用 8 结点体单元将它离散为 $N \times M \times L$ 个单元, 高度 h 方向上为 N 行, 宽度 b 方向上为 M 列, 长度 l 方向上为 L 排, 其中所有的单元可用一个三维数组 $A_{N \times M \times L}$ 来描述, 数组任一个元素 $A(I, J, T)$ 的值表示该单元的弹性模量 E , 且任意结点的总体编码可由 I, J, T, N, M, L 表示, 任意结点的坐标可由 $I, J, T, N, M, L, b, h, l$ 表示, 如表 1 所示. 当 $A(I, J, T)$ 的值为零时表示该单元不存在, 在生成单元时不定义该单元. 定义三维数组 $A_{N \times M \times L}$ 为结构描述数组. 单元的局部编码如图 2 所示.

$$A(I, J, T) = \begin{cases} E & (\text{单元存在且弹性模量大小为 } E) \\ 0 & (\text{单元不存在}) \end{cases} \quad (1)$$

表 1 单元的局部编码、总体编码及相应的结点坐标

Tab 1 Element local code, collective code and its node coordinate

局部码	总 码	节点坐标: x, y, z
k_1	$((I-1)M + J + I - 1) + (T-1)(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}(J-1), \frac{h}{N}(N+1-I), \frac{l}{L}(T-1)$
k_2	$((I-1)M + J + I) + (T-1)(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}J, \frac{h}{N}(N+1-I), \frac{l}{L}(T-1)$
k_3	$(M + J + I + 1) + (T-1)(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}J, \frac{h}{N}(N-I), \frac{l}{L}(T-1)$
k_4	$(M + J + I) + (T-1)(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}(J-1), \frac{h}{N}(N-I), \frac{l}{L}(T-1)$
k_5	$((I-1)M + J + I - 1) + T(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}(J-1), \frac{h}{N}(N+1-I), \frac{l}{L}T$
k_6	$((I-1)M + J + I) + T(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}J, \frac{h}{N}(N+1-I), \frac{l}{L}T$
k_7	$(M + J + I + 1) + T(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}J, \frac{h}{N}(N-1), \frac{l}{L}T$
k_8	$(M + J + I) + T(M+1)(N+1)$	$\frac{b}{M}(J-1), \frac{h}{N}(N-1), \frac{l}{L}T$

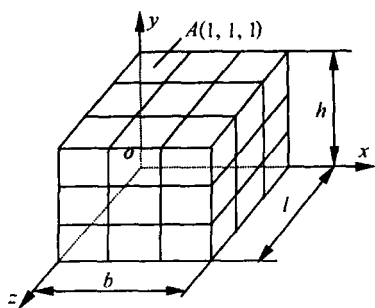


图 1 基结构
Fig. 1 Ground structure

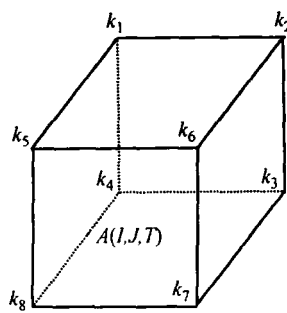


图 2 单元的局部编码
Fig. 2 Element local code

1.2 结构描述数组在网格重新划分中的应用

由结构描述数组 $A(I, J, T)$ 的定义可见, 结构描述数组的元素表示单元 (I, J, T) 的有 (非 0 且等于该单元的弹性模量) 或无 (为 0)。由表 1 可见, 单元 (I, J, T) 结点的总体编码可由 I, J, T 和将基结构在 3 个方向上离散的单元数 N, M, L 表示, 其相应的结点坐标由 I, J, T, N, M, L 和基结构在 3 个方向上的尺寸 b, h, l 表示。在拓扑优化的过程中, 需要不断的删除单元获得结构新的拓扑形式和对新的拓扑进行下一轮的结构分析, 在结构重分析中如果采用网格自动划分会产生一些弊端: ① 生成的单元形状可能不是长方体, 甚至退化为四面体, 导致结构分析精度下降; ② 在每次结构重分析中划分单元的数量不确定, 导致编程的难度很大。结构描述数组的定义很好的解决了上述问题, 使编程变得非常简单, 其实际上是一种快速的人工划分单元的方法, 其实现: ① 根据表 1 中结点总码编号及其相应的坐标定义全部的结点, 通过 3 层循环的嵌套即可实现; ② 然后根据 $A(I, J, T)$ 的值定义单元, 单元 (I, J, T) 的 8 个结点总码编号由 I, J, T 即可计算出来 (见表 1), 如果 $A(I, J, T)$ 非零则以 $A(I, J, T)$ 为弹性模量定义单元, 如果 $A(I, J, T)$ 为零则不定义单元, 由单元定义的先后顺序给单元编上号, 以便于在修改单元的弹性模量时使用。

当划分单元数量很大时, 使用该方法进行网格划分存在一个缺点即结构描述数组 $A(I, J, T)$ 很大, 会占用很大的内存, 从而影响拓扑优化算法的效率。本文采用读写磁盘的方法很好地解决了这一问题, 即在划分网格时从磁盘文件中将结构描述数组读入内存, 划分完网格后即将结构描述数组从内存中删除, 从而不影响结构分析的效率, 在进行弹性模量修改时再将结构描述数组从磁盘文件中读入内存, 修改完后将得到新的结构描述数组写到磁盘文件上。

2 三维弹性体拓扑优化的修改的满应力法

由于基结构为三维弹性体, 不能像文献 [4] 采用修改满应力的方法通过修改单元的厚度使结构每个单元处于满应力的状态, 从而通过删除厚度小于厚度阈值的单元得到一个新的拓扑, 但可以通过迭代修改单元的弹性模量, 使结构每个单元处于满应力的状态, 然后删除弹性模量较低的单元, 从而获得结构的一个新的拓扑。修改单元弹性模量使单元处于满应力 (实际材料的许可应力 $[\sigma]$) 状态, 即:

$$\frac{S(I, J, T)}{A(I, J, T)} = \frac{[\sigma]}{E_0} \tag{2}$$

其中: E_0 为实际材料的弹性模量; $[\sigma]$ 为实际材料的许可应力; $A(I, J, T)$ 为单元的弹性模量, 当单元不存在时, $A(I, J, T)$ 为 0 不用修改该单元的弹性模量; $S(I, J, T)$ 为结构分析后得到单元 Von Mises 应力, 当单元不存在时, $S(I, J, T)$ 为 0

弹性模量的修改公式如下:

$$A(I, J, T) = \frac{E_0}{[\sigma]} S(I, J, T) \tag{3}$$

当单元的弹性模量小于材料实际弹性模量即 $A(I, J, T) \leq E_0$ 时, 有 $\frac{E_0}{[\sigma]} S(I, J, T) \leq E_0$, 即:

$$S(I, J, T) \leq [\sigma] \tag{4}$$

意味着只要弹性模量 $A(I, J, T)$ 小于材料的弹性模量 E_0 , 单元的 Von Mises 应力 $S(I, J, T)$ 也就小于材料的许可应力, 自动满足了应力约束条件。

用材料实际的弹性模量 E_0 初始化结构描述数组 $A_{N \times M \times L}$ 后进行结构分析, 根据式 (3) 修改单元的弹性模量, 当前后两次迭代的弹性模量最大值的差的绝对值小于某个值 η 时, 即:

$$|E_{\max}^{(i+1)} - E_{\max}^{(i)}| \leq \eta \tag{5}$$

此时认为结构已处于满应力的状态, 迭代收敛, 退出修改单元弹性模量的操作, 进入删除单元的操作。

当 $E_{\max}^{(i+1)} \leq E_0$ 时, 将结构描述数组 $A_{N \times M \times L}$ 保存到文件 best.dat 中, 进入删除单元的操作, 即当某单元的弹性模量小于阈值 E_0 时删除该单元, 令该单元的弹性模量 $A(I, J, T) = 0$ 即可, 得到结构的一个

新的拓扑, 但采用变化的阈值, 当完成一次删除单元的操作后, 增加阈值, 使阈值大于删除单元后单元弹性模量的最小值, 然后进入下一轮修改单元弹性模量的操作.

当 $E_{\max}^{(i+1)} > E_0$ 或结构分析失败时, 将 best.dat 文件中读出赋值给结构描述数组 $A_{N \times M \times L}$, 将结构描述数组转化为图形即得到结构最好的拓扑, 结束程序.

弹性模量阈值 E_v 的增加方法:

$$\text{Do } E_v = E_v + \Delta E \quad \text{While}(E_v \leq A_{N \times M \times L} \text{ 中非 } 0 \text{ 元素的最小值}) \quad (6)$$

阈值 E_v 的初值可设为零, 上式是一个增加阈值 E_v 的循环语句, 即一直以增量 ΔE 增加阈值 E_v , 当 E_v 大于 $A_{N \times M \times L}$ 中非 0 元素最小值时结束循环, 很好的解决了在初始阶段单元删除效率低的问题. 为获得接近于结构的最优拓扑和避免在接近最优拓扑时 E_v 过大可能导致删除过多单元造成机构的出现, 弹性模量增量 ΔE 尽可能小一些.

受应力约束的三维弹性体的拓扑优化模型可描述为:

求结构描述数组 $A_{N \times M \times L}$,

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{s.t.} \quad & A(I, J, T) \leq E_0 \quad (I = 1, 2, \dots, N; J = 1, 2, \dots, M; T = 1, 2, \dots, L) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, V 为结构的体积.

上述算法可归纳成如图 3 所示的计算流程图.

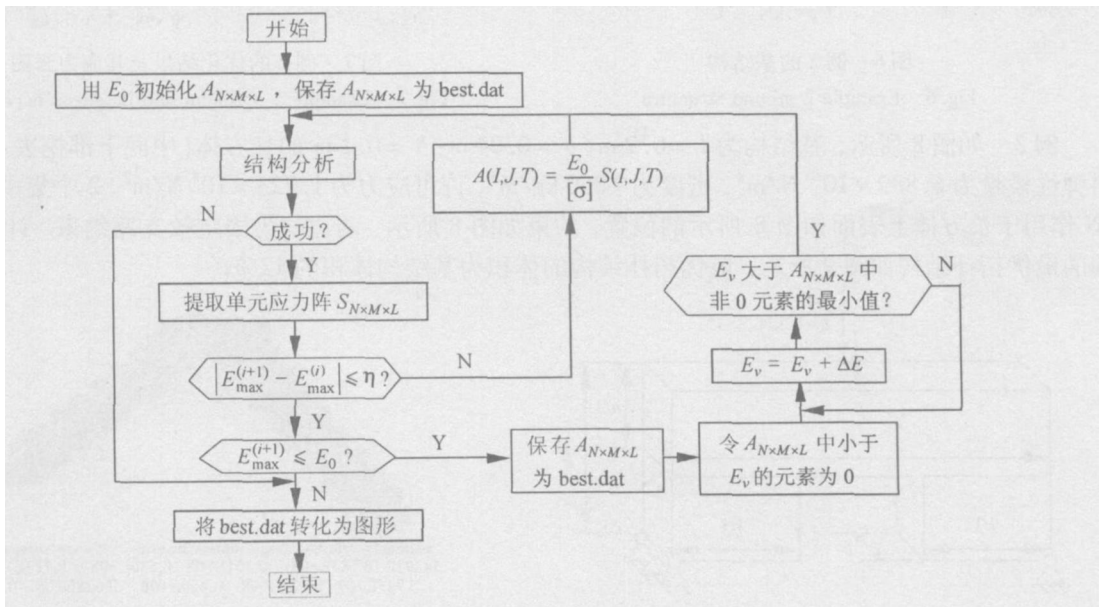


图 3 流程图

Fig 3 Flow chart

3 算例

例 1 如图 4 所示, 基结构为 $0.1\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.1\text{m}$ 的立方体, 划分为 $14 \times 14 \times 14$ 个 8 结点正方体块体元, 材料弹性模量为 $6.889 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 密度为 7850 kg/m^3 , 许可应力为 $1.723 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, 一个集中力 $p = 10 \text{ kN}$ 作用于立方体上表面的形心, 立方体下方四个角点处给予固定铰支座约束. 计算得到结构的最优拓扑结构如图 5 所示, 最优拓扑结构的体积为基结构体积的 3.79%.

例 2 如图 6 所示, 基结构为 $0.2\text{m} \times 0.04\text{m} \times 0.1\text{m}$ 的长方体, 划分为 $20 \times 4 \times 10$ 个 8 结点正方体块体元, 材料弹性模量为 $6.889 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 密度为 7850 kg/m^3 , 许可应力为 $1.723 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, 6 个集中力 $p = 1 \text{ kN}$ 作用于长方体下表面如图 6 所示的位置, 约束如图 6 所示, 一边为固定铰支座约束, 另一边为滚轴支座约束. 计算得到结构的最优拓扑结构如图 7 所示, 最优拓扑结构的体积为基结构体积的 18.5%.

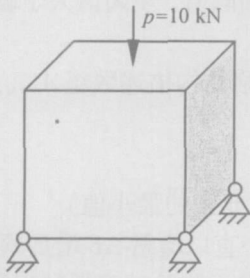
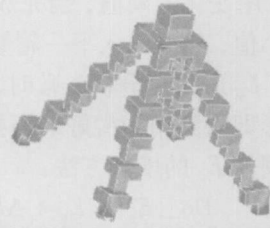


图 4 例 1 的基结构

Fig. 4 Example 1 ground structure



7.019	0.170E+08	0.340E+08	0.510E+08	0.680E+08
0.849E+07	0.256E+08	0.425E+08	0.595E+08	0.765E+08

图 5 例 1 的优化结果及其应力云图

Fig. 5 Example 1 optimum and its stress nephogram

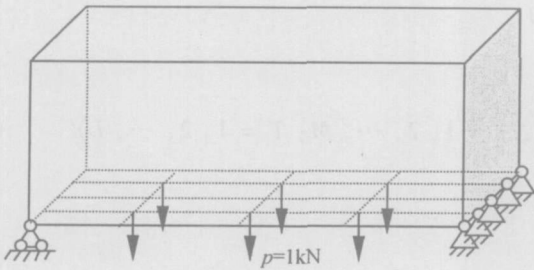
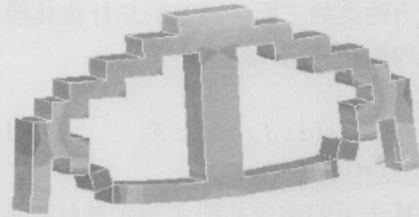


图 6 例 2 的基结构

Fig. 6 Example 2 ground structure



4163	0.472E+07	0.943E+07	0.141E+08	0.189E+08
0.236E+07	0.707E+07	0.118E+08	0.165E+08	0.212E+08

图 7 例 2 的优化结果及其应力云图

Fig. 7 Example 2 optimum and its stress nephogram

例 3 如图 8 所示, 基结构为 $l = 0.2\text{ m}$, $b = 0.04\text{ m}$, $h = 0.1\text{ m}$ 的长方体 (中间下部挖去一块), 材料弹性模量为 $6.889 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$, 密度为 7850 kg/m^3 , 许可应力为 $1.723 \times 10^8\text{ N/m}^2$, 2 个集中力 $p = 10\text{ kN}$ 作用于长方体上表面如图 8 所示的位置, 约束如图 8 所示, 两边均为固定铰支座约束. 计算得到结构的最优拓扑结构如图 9 所示, 最优拓扑结构的体积为基结构体积的 12%.

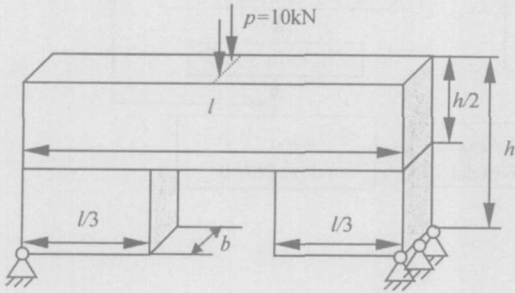
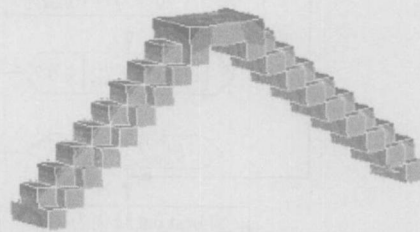


图 8 例 3 的基结构

Fig. 8 Example 3 ground structure



542918	0.183E+08	0.361E+08	0.530E+08	0.717E+08
0.945E+07	0.272E+08	0.450E+08	0.628E+08	0.806E+08

图 9 例 3 的优化结果及其应力云图

Fig. 9 Example 3 optimum and its stress nephogram

4 结语

数值结果表明修改满应力法确实能实现结构的拓扑优化, 该方法稳健性、通用性很好. 计算工作量主要花在不断迭代修改单元的弹性模量, 使结构每个单元处于满应力的状态, 所有算例都是在 1G 的计算机上完成, 由于计算工作量很大, 笔者没有将基结构划分成很细密单元, 故得到的拓扑的边界并不是很光滑, 但随着网格密度的提高, 可以获得光滑的拓扑边界. 由于结构描述数组的引入, 可很方便地设计各种形式的基结构, 在每一轮结构分析中极其方便地实现结构的单元重新划分, 同时也很方便地处理约束条件. 当然, 该方法得到的拓扑不一定是结构的最优拓扑, 但通过减小弹性模量增量, 应该获得接近于结构最优拓扑的拓扑形式. 值得一提的是, 在计算过程中不需要采取任何的人工控制措施, 也没有出现约束不够的单元, 不像直接删除单元法^[2, 3]那样出现一些需要人工强行删除的孤立单元. (转第 867 页)

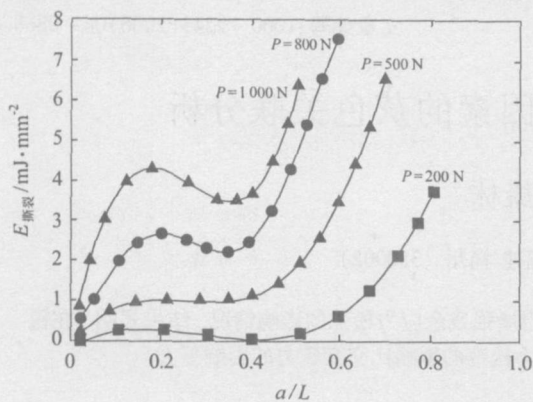


图 8 撕裂能随裂缝深度的变化关系图

Fig. 8 The variation of tearing energy with the relative depth of crack

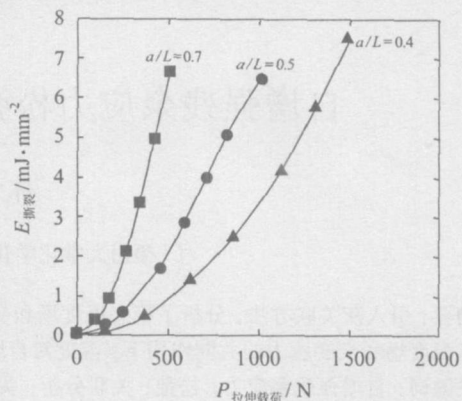


图 9 撕裂能随拉伸载荷的变化关系图

Fig. 9 The variation of tearing energy with the tensile load

参考文献:

- [1] Yeoh O H. Analysis of deformation and fracture of 'pure shear' rubber test piece [J]. *Plastic, Rubber and Composites*, 2001, 30(8): 389-397.
- [2] Chai H. Interfacial mixed-mode fracture of adhesive bonds undergoing large deformation [J]. *Solid and Structure*, 2003 (40): 6023-6042.
- [3] 杨晓翔, 张永弘, 曲宝. 橡胶钢双材料界面断裂韧性的实验测定 [J]. *大庆石油学院学报*, 1998, 22(4): 63-65.
- [4] Pilaparti R M V, Pontula G. Maximum tearing energy computation for 3D rubber fracture [J]. *Engng Fracture Mech*, 1994, 49(2): 309-316.
- [5] Mas W V, Fatemi A. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber [J]. *International Journal of Fatigue*, 2002, 24(9): 949-961.
- [6] 杨晓翔. 非线性橡胶材料的有限单元法 [M]. 北京: 石油工业出版社, 1999.
- [7] Pilaparti R M V. Finite element analysis of interface cracks in rubber materials [J]. *Engng Fracture Mech*, 1994, 47(3): 309-316.
- [8] 傅政. 橡胶材料性能与设计应用 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2003.

(接第 862 页)

参考文献:

- [1] Bendsoe M P, Kuchukh i N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 1988, 71: 197-224.
- [2] Querin O M, Young V, Steven G P, et al. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 189: 559-573.
- [3] 荣见华, 姜节胜, 胡德文, 等. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑渐进优化方法 [J]. *力学学报*, 2003, 35(5): 585-591.
- [4] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化 [J]. *大连理工大学学报*, 1995, 35(1): 1-9.
- [5] 崔海涛, 桑韧, 温卫东. 基于遗传算法的连续结构拓扑优化分析 [J]. *南京航空航天大学学报*, 2004, 36(2): 159-163.
- [6] 隋允康, 杨德庆, 王备. 多工况应力和位移约束下连续体结构拓扑优化 [J]. *力学学报*, 2000, 32(2): 171-179.
- [7] 杨德庆, 刘正兴, 隋允康. 连续体结构拓扑优化设计的 ICM 方法 [J]. *上海交通大学学报*, 1999, 33(6): 734-736.