第 34卷 第 6期
2006年 12月

福州大学学报(自然科学版)
Journal of Fuzhou University (Natural Science)

Vol 34 No. 6
Dec. 2006

文章编号: 1000-2243(2006)06-0798-05

半参数回归模型小波估计的相合性

姜玉英[1], 刘 强[2], 吴可法[3]

(1. 北京印刷学院基础部, 北京 102600; 2. 首都经济贸易大学统计学院, 北京 100070;
3. 西安交通大学理学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 研究一类固定设计下的半参数回归模型. 通过利用最小二乘法、加权最小二乘法及新方法小波估计法给出了未知参数 β的估计, 在较弱的条件下给出了 β的最小二乘估计$\hat{\beta}_n$ 的弱收敛速度、强相合性以及加权最小二乘估计$\tilde{\beta}_n$ 的强收敛速度.

关键词: 半参数模型; 小波估计; 收敛速度; 相合性

中图分类号: O212.1　　　　文献标识码: A

The consistency of the wavalet estimation in semiparametric regression model

JIANG Yu-yin[1], LIU Qiang[2], WU Ke-fa[3]

(1. Department of Basic Science, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China; 2. School of Statistics, Capital University of Economics and Business, Beijing 100070, China; 3. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: A kind of semiparametric regression model under fixed design is studied. The estimators of unknown parameter β are derived by the least square method, the weighted least square method and a new method-the waveletmethod. Under some weak conditions, the weak convergence rate, strong consistency and strong convergence rate are obtained.

Keywords: semiparametric model; wavalet estimation; convergence rate; consistency

考虑回归模型:

$$y_i = x_i\beta + g(t_i) + \sigma_i e_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

其中: $x_i \in R^1$, $t_i \in [0, 1]$, $\sigma_i^2 = f(u_i)$, $u_i \in [0, 1]$, $\{x_i, t_i, u_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$是固定设计. β是未知参数向量, 未知 Borel函数 $g(\cdot)$、$f(\cdot)$定义于紧区间 I上. 不失一般性, 我们在$[0, 1]$上讨论 $g(\cdot)$和$f(\cdot)$. $\{e_i\}$为 i. i. d. 随机误差, 且$Ee_1 = 0$, $Ee_1^2 = 1$.

关于上述模型已有一些学者进行了讨论, 文献[1]、[2]讨论了 $g(\cdot) \equiv 0$, $\sigma_i^2 = f(x_i)$时, 在$f(\cdot)$的估计分别取核估计和近邻估计的情况下 β的加权最小二乘估计的渐近正态性. 文献[3]讨论了在$g(\cdot)$和$f(\cdot)$取一般非参数估计(包括常见的近邻估计和核估计)且方差 $\sigma_i^2 = f(u_i)$中的设计点列$\{u_i\}$为已知设计点列情况下 β的最小二乘估计$\hat{\beta}_n$和加权最小二乘估计 $\bar{\beta}$的渐近正态性. 文献[4]则证明了它们的强相合性. 本文利用小波估计的方法给出了未知参数 β的估计, 以及在一定的条件下 β的最小二乘估计$\hat{\beta}_n$ 的弱收敛速度、强相合性以及加权最小二乘估计$\tilde{\beta}_n$ 强收敛速度.

收稿日期: 2005-12-05
作者简介: 姜玉英(1976-), 女, 硕士, 讲师.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771065); 北京市信号与信息处理重点建设学科资助项目(081002); 北京印刷学院青年科研基金资助项目(E-e-05-52)

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 估计与主要结果

以下均假定刻度函数 $\phi\in S_v$（即 Schwartz空间，定义见文献[6]），且相伴 $L^2(R)$的多分辨分析为 $\{V_m\}$，$\{V_m\}$的再生核为：

$$E_m(t, s) = 2^m E_0(2^m t, 2^m s) = 2^m \sum_{k\in Z}\phi(2^m t-k)\phi(2^m s-k)$$

下面给出半参数回归模型(1)的线性小波估计．注意到：

$$E(Y_i - x_i\beta) = g(t_i) \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

因而当 β固定时，可定义 $g(\cdot)$的估计为：

$$\hat{g}_0(t) \triangleq \hat{g}_0(t, \beta) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\beta)\int_{A_i}E_m(t, s)\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

其中：$A_i=[s_{i-1}, s_i)$为$[0, 1]$的分割，且 $t_i\in A_i$．然后求极小问题 $\min\limits_{\beta\in R}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\beta-\hat{g}_0(t))^2$，记其解为$\hat{\beta}_n$，则有：

$$\hat{\beta}_n = \tilde{S}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i \tag{3}$$

其中：$\tilde{x}_i = x_i - \sum_{j=1}^{n}x_i\int_{A_j}E_m(t_i, s)\,\mathrm{d}s$，$\tilde{y}_i = y_i - \sum_{j=1}^{n}y_i\int_{A_j}E_m(t_i, s)\,\mathrm{d}s$，$\tilde{S}_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2$，$1\leqslant i\leqslant n$.

另一方面，由式(1)可知：$E(y_i - x_i\beta-g(t_i))^2=f(u_i)$，故可以定义 $f(\cdot)$的估计为：

$$\hat{f}_n(u) = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i - \tilde{x}_i\hat{\beta}_n)^2\int_{A_i}E_m(u, s)\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

为讨论方便，不妨假设 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\hat{f}_n(u_i)|>0$，否则，可对$\hat{f}_n(u_i)$进行修正，仿式(3)可得 β的加权最小二乘估计：

$$\tilde{\beta}_n = \tilde{T}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}a_i\tilde{x}_i\tilde{y}_i \tag{5}$$

其中：$\tilde{T}_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i\tilde{x}_i^2$，$a_i=1/f(u_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$.

约定 C，C_i，$i\geqslant 1$表示绝对常数，在不同的地方可以表示不同的值.

下面是本文的基本假定：

G_1：$g(\cdot)\in H^\alpha$（即 Sobolev空间，定义见文献[2]），$\alpha>1/2$

G_2：$g(\cdot)$满足 γ阶 Lipschitz条件，$\gamma>0$

G_3：$\phi\in S_v$，$v\geqslant\alpha$，ϕ满足一阶 Lipschitz条件且具有紧支撑，当 $\eta\to 0$时，$|\hat{\phi}(\eta)-1|=O(\eta)$，这里的 $\hat{\phi}$为 ϕ的 Fourier变换.

G_4：当 $n\to\infty$，$2^m=O(n^{1/3})$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(s_i - s_{i-1})=O(n^{-1})$.

G_5：当 n足够大时，有 $C_1\leqslant\tilde{S}_n^2/n\leqslant C_2$.

G_6：$0<m_0\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(u_i)\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(u_i)\leqslant M_0<\infty$.

以下给出本文的主要结果.

定理 1 对于模型(1)，设条件 $G_1\sim G_6$成立，则：

$$\hat{\beta}_n - \beta = O_p(n^{-1/3}) + O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{6}$$

$$\tilde{\beta}_n - \beta = O_p(n^{-1/3}) + O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{7}$$

当 $\alpha>3/2$时，有：

$$\hat{\beta}_n - \beta = O_p(n^{-1/3}) \tag{8}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\tilde{\beta}_n - \beta = O_p(n^{-1/3}) \tag{9}$$

其中,
$$\tau_m = \begin{cases} (2^m)^{-\alpha+1/2} & (1/2 < \alpha < 3/2) \\ \sqrt{m}/(2^m) & (\alpha = 3/2) \\ 1/(2^m) & (\alpha > 3/2) \end{cases}$$

定理 2 对于模型(1), 设条件 $G_1 \sim G_6$ 成立, 则:

1) 若存在 $p > 2$, 使得 $E|e_1|^p < \infty$, 则有:

$$\hat{\beta}_n - \beta = o(1) \tag{10}$$

2) 若 $\alpha > 3/2$, 且存在 $p > 4$, 使得 $E|e_1|^p < \infty$, 则有:

$$\hat{\beta}_n - \beta = o(n^{-1/4}) \tag{11}$$

2 若干引理

引理 1 设 $\phi \in S_q$ 且条件 G_3 成立, 则有: ① $\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}|E_m(x, y)| = O(2^m)$. ② $\sup_x \int_0^1 |E_m(x, y)|\mathrm{d}y \leqslant C$. 证明见文献[7].

引理 2 设 $G_1 \sim G_4$ 成立, 则:

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|f(t) - \sum_{k=1}^n f(t_k)\int_{A_k} E_m(t, s)\mathrm{d}s\right| = O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{12}$$

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|g(t) - \sum_{k=1}^n g(t_k)\int_{A_k} E_m(t, s)\mathrm{d}s\right| = O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{13}$$

证明见文献[8]引理(2.1).

引理 3 设 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ 为独立随机变量, 且存在绝对的常数 $0 < m < \infty$, 使得 $|\mu_i| \leqslant m$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立. 若 $E\mu_i = 0$, 那么对任给的 $\varepsilon > 0$ 及 $n \geqslant 1$ 均有:

$$P\left[\left|\sum_{i=1}^n \mu_i\right| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant 2\exp\left\{-\varepsilon^2 \Big\backslash \left[2\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\mu_i) + 2m\varepsilon\right]\right\}$$

证明见文献[11].

引理 4 对随机变量 X 有: $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| \geqslant n\} \leqslant E|X| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| \geqslant n\}$. 从而 $E|X| < \infty$ 当且仅当上述级数收敛. 证明见文献[8].

3 主要定理的证明

3.1 定理 1的证明

由式(1)、(3)和(5)可得:

$$\hat{\beta}_n - \beta = \tilde{S}_n^{-2}\left[\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\tilde{\eta}_i + \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\tilde{g}_i\right] \tag{14}$$

$$\tilde{\beta}_n - \beta = \tilde{T}_n^{-2}\left[\sum_{i=1}^n a_i\tilde{x}_i\tilde{\eta}_i + \sum_{i=1}^n a_i\tilde{x}_i\tilde{g}_i\right] \tag{15}$$

其中: $\tilde{\eta}_i = \eta_i - \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{A_j} E_m(t_i, s)\mathrm{d}s$, $\tilde{g}_i = g(t_i) - \sum_{j=1}^n g(t_j)\int_{A_j} E_m(t_i, s)\mathrm{d}s$, $\eta_i = \sigma_i e_i$. 由式(14)可知:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_n - \beta &= n\tilde{S}_n^{-2}\left[n^{-1}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\eta_i - n^{-1}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\sum_{j=1}^n \eta_j\int_{A_j} E_m(t_i, s)\mathrm{d}s + n^{-1}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\tilde{g}_i\right] \\ &\triangleq n\tilde{S}_n^{-2}[I_{1n} + I_{2n} + I_{3n}]\end{aligned} \tag{16}$$

而 $EI_{1n} = 0$, 由条件 G_5, G_6 可知: $EI_{1n}^2 = n^{-2}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\sigma_i^2 = n^{-1} \cdot n^{-1}\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\sigma_i^2 \leqslant Cn^{-1}$. 所以,

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$I_{1n} = O_p(n^{-1/2}) \tag{17}$$

$EI_{2n}^2 = n^{-2}E\left[\sum_{j=1}^{n}\eta_j\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\int_{A_j}E_m(t_i, s)\,ds\right]^2 = n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\int_{A_j}E_m(t_i, s)\,ds\right]^2 \leqslant Cn^{-1}M_0\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}|E_m(t_i, s)|\,ds\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2 \cdot n^{-1}\cdot 2^m = O(n^{-2/3})$. 从而有：

$$|I_{2n}| = O_p(n^{-1/3}) \tag{18}$$

由引理 2可知：

$$|I_{3n}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}_i|\cdot n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\tilde{x}_i| = O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{19}$$

结合式(16)~(19)可知：式(6)成立. 由文献[7]知道，当 $\alpha > 3/2$时，$g(\cdot)$满足 1阶 Lipschitz条件. 从而式(8)成立. 式(7)、(9)同式(6)、(8)的证明过程类似.

3.2　定理 2的证明

由式(14)可知：

$$\hat{\beta}_n - \beta = \tilde{S}_n^{-2}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\eta_i - \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_{A_j}E_m(t_i, s)\,ds + \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{g}_i\right] \triangleq B_{1n} - B_{2n} + B_{3n} \tag{20}$$

根据条件 G_5 及式(13)可知：

$$|B_{3n}| \leqslant (n\tilde{S}_n^{-2})\cdot n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\tilde{x}_i|\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}_i| = O(n^{-\gamma}) + O(\tau_m) \tag{21}$$

令 $B_{1n} = \tilde{S}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\eta_i \triangleq \sum_{i=1}^{n}b_{ni}e_i$，由条件 G_5 可易知：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}| \leqslant C\cdot(\tilde{S}_n^{-2})^{1/2}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\tilde{S}_n^{-2})^{1/2}|x_i| \leqslant Cn^{-1/2} \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_{ni}^2 = \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2\sigma_i^2 / \tilde{S}_n^4 \leqslant M_0\cdot\tilde{S}_n^{-2} \leqslant Cn^{-1} \tag{23}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，记 $e_i' = e_iI(|e_i| \leqslant \varepsilon^2 i^{1/p})$，$e_i'' = e_i - e_i'$，$e_{ni} = b_{ni}(e_i' - Ee_i')$. 由式(22)知：$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|e_{ni}| \leqslant 2\varepsilon^2 n^{1/p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}| \leqslant C\varepsilon^2 n^{1/p-1/2}$. 由式(23)知：$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(e_{ni}) = \sum_{i=1}^{n}b_{ni}^2E(e_i' - Ee_i')^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}b_{ni}^2E(e_i')^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}b_{ni}^2 \leqslant Cn^{-1}$. 而

$$\begin{aligned} B_{1n} &= \left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}(e_i' + e_i'')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}(e_i' - Ee_i' + e_i'' - Ee_i'')\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}e_{ni}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}Ee_i''\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}e_i''\right| \end{aligned} \tag{24}$$

根据引理 3，对于任意的 $\epsilon > 0$，有

$$P\left[\left|\sum_{i=1}^{n}e_{ni}\right| \geqslant \epsilon\right] \leqslant 2\exp\left\{-\epsilon^2 / \left[2\frac{C}{n} + 2C\varepsilon^2 n^{1/p-1/2}\epsilon\right]\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{C\epsilon}{\varepsilon^2}n^{1/2-1/p}\right\}$$

取 $0 < \varepsilon < \sqrt{C\epsilon}$，则：$P\left[\left|\sum_{i=1}^{n}e_{ni}\right| \geqslant \epsilon\right] \leqslant 2\exp\{-n^{1/2-1/p}\}$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}e_{ni}\right| \geqslant \epsilon\right\} < \infty$，由 Borel-Cantelli引理知：

$$\sum_{i=1}^{n}e_{ni} \to 0 \tag{25}$$

又因为 $Ee_1^p < \infty$，由三级数定理可以证明得：$\sum_{i=1}^{\infty}|e_i''| < \infty$.

事实上，对于任意的 $c > 0$，有 $P[|e_i''| \geqslant c] \leqslant P[|e_i| > \varepsilon^2 i^{1/p}]$. 所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}P[|e_i''| \geqslant c] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}P[|e_i| > \varepsilon^2 i^{1/p}] = \sum_{n=1}^{\infty}P[|e_i|^p > i\varepsilon^{2p}]$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

因为 $E|e_i|^p<\infty$, 根据引理 4可以知道: $\sum_{i=1}^{\infty}P[|e_i|^p> i\varepsilon^{2p}]<\infty$. 记: $|e_i''|^c=|e_i''|I(|e_i''|<c)$, 当 i充分大时, 有: $E|e_i''|^c=E|e_i|I(|e_i|<c,\ |e_i|>\varepsilon^2 i^{1/p})=0$. 同理可证 $\mathrm{Var}|e_n''|^c=0$. 所以: $\sum_{i=1}^{\infty}E|e_n''|^c<\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Var}|e_n''|^c<\infty$, 由三级数定理可知: $\sum_{i=1}^{\infty}|e_i''|<\infty$. 结合式(22)可得:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}e_n''\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|e_i''|\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}|=O(n^{-1/2})\tag{26}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_{ni}Ee_i''\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}E|e_i|I\{|e_i|>\varepsilon^2 i^{1/p}\}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}|\leqslant Cn^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}i^{-(p-1)/p}\leqslant n^{-1/2+1/p}=o(1)\tag{27}$$

结合式(24)~(27)可得:

$$B_{1n}=o(1)\tag{28}$$

令:

$$B_{2n}=\tilde{S}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{S}_n^{-2}\tilde{x}_i\sigma_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\right]e_j\triangleq\sum_{j=1}^{n}\overline{b}_{nj}e_j$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\overline{b}_{nj}|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\tilde{S}_n^{-2}\tilde{x}_i\right|\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j\cdot Cn^{-1}2^m=O(n^{-2/3})$$

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{b}_{nj}^2\leqslant M_0\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{S}_n^{-2}\tilde{x}_i\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\right]^2\leqslant M_0\left[\sum_{i=1}^{n}|\tilde{S}_n^{-2}\tilde{x}_i|\right]^2\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\right]^2=O(n^{-2/3})$$

仿照式(28)的证明, 即可证得:

$$B_{2n}=o(1)\tag{29}$$

结合式(20)、(21)、(28)和(29), 有 $\hat{\beta}_n-\beta=o(1)$. 式(11)成立.

参考文献:

[1] Carroll R J. Adapting for heteroscedasticity in linear models[J]. Ann statist, 1982, 10(4): 1 224-1 233.

[2] Robinson P M. Asymptoically efficiency estimation in the presence of heteroscedasticity of unkonwn form[J]. Econometrika, 1987(55): 875-891.

[3] 高集体, 陈希儒, 赵林城. 部分线性模型中估计的渐近正态性[J]. 数学学报, 1994, 37(2): 256-268.

[4] 陈明华, 任 哲, 胡舒合. 部分线性模型中估计的强相合性[J]. 数学学报, 1998, 41(1): 436-438.

[5] 陈明华. 固定设计下半参数回归模型估计的相合性[J]. 高校应用数学学报, 1998, 23(A): 301-310.

[6] 柴根象, 徐克军. 半参数回归的线性小波光滑[J]. 应用概率统计, 1992, 15(1): 97-105.

[7] Antoniads A, Gregoire G, Mckeague I W. Wavelet methods for cure estimation[J]. J Amer Statist Assoc, 1994, 89: 1 340-1 353.

[8] 钱伟民, 柴根象, 蒋凤瑛. 半参数回归模型的误差方差的小波估计[J]. 数学年刊, 2002, 21(A): 341-350.

[9] 吴可法, 刘 强, 姜玉英, 等. 半参数变量含误差回归模型的小波估计[J]. 自然杂志, 2004, 26(1): 61.

[10] 刘 强, 姜玉英, 吴可法. 半参数变量含误差函数关系模型的小波估计[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 296-307.

[11] Bennett G. Probabilities for the sums of independent random variables[J]. J Amer Statist Assoc, 1962, 57(297): 33-45.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net