文章编号: 1000-2243(2006)06-0787-03

τ-强局部模

王 平[1], 付晓雄[2], 辛 林[3]

(1. 福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州　350002; 2. 武警福州指挥学院, 福建 福州　350002;
3. 福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建 福州　350007)

摘要: 推广了局部模的概念, 定义了 τ-局部模与 τ-强局部模, 探讨了 τ-强局部模的性质, 并且利用 τ-稠密子模得到了关于 τ-强局部模的一个等价刻画.

关键词: 挠理论; τ-稠密子模; τ-强局部模
中图分类号: O153.3　　文献标识码: A

τ-strongly local module

WANG Ping[1], FU Xiao-xiong[2], XIN Lin[3]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China;
2. Fuzhou Command College, China Armed Police Force, Fuzhou, Fujian 350002, China;
3. College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007, China)

Abstract: The definition of local module is generalized to τ-local module and τ-strongly local module. The properties about τ-strongly local module are studied and charactrized by using τ-dense submodule.

Keywords: torsion theories; τ-dense submodule; τ-strongly local module

设 M 的子模 K 称为小子(small)模, 也称为多余子模并记为 $K<<M$, 如果对 M 的任意子模 L, 由 $M=K+L$, 可得 $M=L$. 显然小子模是本质子模的对偶概念, 它在刻画完全环, 特别是投射盖上有重要的应用. 近年来许多作者利用小子模, 将模的直和等进行推广. 如 Wisbauer在文献[1]中定义的可补模、可弱补模都是利用小子模来进行的.

设 R-tors表示 R-模范畴上所有遗传挠对的集合. 用 ξ表示 R-tors的最小者, 即 $\xi=(0, R\text{-Mod})$; 用 χ表示 R-tors的最大者, 即 $\chi=(R\text{-Mod}, 0)$的挠理论. 设 $\tau\in R$-tors, 称 M 的子模 N 在 M 中是 τ-多余的或 τ-小子模, 如果不存在 M 的真的 τ-纯子模 T 使得 $N+T$ 在 M 中 τ-稠密. 有关 τ-多余子模的性质, 特别是关于多余子模与 τ-多余子模之间的关系可参阅文献[2], 有关挠理论的概念参阅文献[3].

定义 1　设 $\tau\in R$-tors, 左 R-模 M 称为 τ-强半局部的, 如果 M 的每一个非零 τ-稠密子模 N 有且只有有限个极大子模; 特别如果 M 的每一个非零 τ-稠密子模有且只有一个极大子模时, 称 M 是 τ-强局部模.

显然 τ-强局部模的商模还是 τ-强局部模. 我们知道, 一个模 M 称为局部模, 如果 M 有唯一的一个极大子模. 于是每一个非零 τ-强局部模是局部模, 局部模是 ξ-强局部模. 模 M 称为 τ-局部模, 如果 $M/(\tau\text{-rad}(M))$是 τ-上临界模. Garcia在讲义①中证明了环 R 作为正则模 $_RR$ 是 τ-局部的当且仅当 R 中存在唯一极大的真的 τ-纯左思想. 但一般情况下, 局部模未必是 τ-局部模. 模 M 称为半局部模, 如果 $M/$

收稿日期: 2006-01-18
作者简介: 王 平(1979-), 女, 助教.
基金项目: 福建省教育厅科研资助项目(JB05053; JB05041)

① Garcia J L. Condiciones de finitud relativas a topologias aditivas. Publ Depto Algebra y Fundamentos Universidad de Murcia #2, Murcia, 1983.

rad (M)是半单模, 其中 rad(M)是模M的 Jacobson根. 模M称为 τ-半局部模, 如果$M/(\tau\text{-rad}(M))$是τ-上临界模直和的子模.

例 1 设F是域, 环$R=\begin{pmatrix}F&0\\0&F\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}F&F\\0&F\end{pmatrix}$. 则$I=\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}$是环$R$的幂等理想, 由$I$确定了一个Jansian挠对τ. M中只有 2个极大子模

$$N_1=\begin{pmatrix}0&F\\0&F\end{pmatrix},\quad N_2=\begin{pmatrix}F&F\\0&0\end{pmatrix}$$

N_1是M的 τ-稠密子模, N_1中只有一个极大子模$K=\begin{pmatrix}0&F\\0&0\end{pmatrix}$, M中还有一个 τ-稠密子模$N_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}$, 这是单模, 于是零是其唯一的极大子模. 注意$N_2$不是$M$的 τ-稠密子模. 于是, M是 τ-强半局部模, 但不是 τ-强局部模.

下面例子表明局部模未必是 τ-强局部模.

例 2 设F是域, $R=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}\mid a, b, c, d\in F\right\}$, $M=R$作为左R-模, 存在唯一的极大子模$N=\left\{\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&d\\0&0&0\end{pmatrix}\mid b, c, d\in F\right\}$, 因此$M$是局部模. 但$N$有 2个极大子模$N_1=\left\{\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mid b, c\in F\right\}$和$N_2=\left\{\begin{pmatrix}0&0&c\\0&0&d\\0&0&0\end{pmatrix}\mid c, d\in F\right\}$. 取$\tau=\chi$, 则$M$不是 χ-强局部模.

如果M是 τ-强局部模, P是M的唯一的极大子模, 则P是 τ-稠密子模或 τ-纯子模. 特别当M是有限生成 τ-局部模, 并且P是其唯一极大子模, 则M中除了M自身外, 没有其它的 τ-稠密子模, 否则这些 τ-稠密子模必然包含在P中, 从而P也是 τ-稠密子模, 矛盾.

引理 1 设M是 τ-强局部模. 如果N是M的 τ-稠密子模, 则N也是 τ-强局部模.

证明 对N的任意子模N_1使得N/N_1是 τ-挠模, 由于$(M/N_1)\setminus(N/N_1)\cong M/N$是 τ-挠模, 所以$N_1$是$M$的 τ-稠密子模, 由$M$是 τ-强局部模, 则$N_1$有唯一的极大子模, 故$N$是 τ-强局部模.

推论 1 设M是 τ-强半局部模. 如果N是M的 τ-稠密子模, 则N也是 τ-强半局部模.

定理 1 设$\tau\in R$-tors, M是左 noether左R-模, 则M是 τ-强局部模当且仅当M中有唯一极大的 τ-纯子模或有唯一的 τ-稠密子模合成列

$$M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq M_2\supsetneqq M_3\supsetneqq\cdots$$

使得如果$\bigcap_{n=0}^{\infty}M_n$是$M$的 τ-稠密子模, 则$\bigcap_{n=0}^{\infty}M_n$也是 τ-强局部模.

证明 “⇒”由M是 τ-强局部模, 则M有唯一极大子模M_1. 如果M_1是 τ-纯子模, 证明结束.

因此, 可以设M_1是 τ-稠密子模, 由引理 1, M_1是左 noether并且是 τ-强局部左R-模. 假定已经有模列$M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq M_2\supsetneqq\cdots\supsetneqq M_{n-1}$, 满足:

- 每一个M_i是左 noether并且是 τ-强局部左R-模;
- 每一个M_i是M的 τ-稠密子模;
- 每一个M_i是M_{i-1}的唯一极大子模.

并且可以假定上述的模列是唯一的. 对于M_{n-1}, 存在唯一的极大子模M_n. 如果M_n是M_{n-1}的 τ-纯子模, 由于M_{n-1}在M_{n-2}中是唯一的极大子模, 因此M_n也是M_{n-2}的 τ-纯子模, 依此类推, M_n是M的 τ-纯子模. 如果Q是M的另外一个真的 τ-纯子模, 则$Q\subseteq M_1$, 显然$Q\neq M_1$, 从而$Q\subseteq M_2$, 同理$Q\neq M_2$, 依此类推, $Q\subseteq M_n$. 这表明M_n是M中唯一的极大 τ-纯子模. 如果M_n是M_{n-1}的 τ-稠密子模, 那么由引理 1, M_n

是左 noether并且是 τ-强局部左 R-模．从而又得到满足上述条件的合成列

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_{n-1} \supsetneqq M_n$$

如果 $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ 是 M 的 τ-稠密子模，由引理 1，$\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ 是 τ-强局部模．

"$\Leftarrow$"设 N 是模 M 的 τ-稠密子模．如果 M 有唯一极大的 τ-纯子模 P，则只能有 $N = M$，因此 P 也是 N 的极大子模．如果 M 有 τ-稠密子模合成列

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq M_3 \supsetneqq \cdots$$

并且存在 n，使得 $M_{n+1} \subseteq N \subseteq M_n$，则 $N = M_n$ 或 $N = M_{n+1}$，从而 N 有唯一极大子模 M_{n+1} 或 M_{n+2}．如果对所有的 n，$N \subseteq M_n$，则 $N \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$．于是由于 $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ 是 M 的 τ-稠密子模，所以 N 有唯一的极大子模，从而 M 是 τ-强局部模．

由定理 1可得如下推论：

推论 2 设 $\tau \in R$-tors是余遗传的，M 是 τ-挠自由模且是 τ-强局部模，则 M 有唯一极大的 τ-纯子模．

推论 3 设 M 是左 noether模，并且 τ-稠密子模满足降链条件，则 M 是 τ-强局部模当且仅当 M 有唯一极大的 τ-纯子模．

注：记 $L_r(M)$ 表示模 M 中所有 τ-稠密子模的交．环 R 满足 τ-稠密左理想降链条件当且仅当 τ是 jansian并且 $R/L_r(R)$ 是左 artin[3]①．实际上，对于左 R-模 M，如果 $M/L_r(M)$ 是左 artin模，则 M 的 τ-稠密子模满足降链条件．

参考文献：

[1] Wisbauer R. Foundations of modules and rings[M]. [s l]: Gordon and Breach, 1991.
[2] Xin L. Small submodules relative to a torsion theory[J]. Communication in Algebra, 1993, 21(1): 13－23.
[3] Golan J S. Torsion theories[M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1986

① TeplyM. Finiteness conditions on torsion theories. University of Granada Leature Notes, Granada, 1984.