文章编号: 1000-2243(2006)06-0784-03

# 非奇异$M$-矩阵的等价表示

林美容, 陈神灿

(福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州　350002)

摘要: 给出了$Z$-矩阵为非奇异$M$-矩阵以及不可约$Z$-矩阵为非奇异$M$-矩阵的一些新的充要条件, 改进了相应的一些结果.

关键词: $Z$-矩阵; 非奇异$M$-矩阵; 非负矩阵; 非负不可约矩阵

中图分类号: O151.21　　文献标识码: A

## Equivalent representations of nonsingular $M$-Matrices

LIN Mei-rong　CHEN Shen-can

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China)

**Abstract**: Presents some new necessary and sufficient conditions such that a $Z$-matrix is a nonsingular $M$-Matrix. In the meanwhile, it has been proved that some new necessary and sufficient conditions such that an irreducible $Z$-matrix is a nonsingular $M$-Matrix. It improved some related results.

**Keywords**: $Z$-matrix; $M$-Matrix; nonnegative matrix; irreducible nonnegative matrix

## 1 引言和符号

$M$-矩阵是一类具有对角元素非负和其他元素非正的实方阵, 它是应用非常广泛的矩阵类, 在计算数学、数值分析、生物学、物理学与数理经济学等领域都有重要的应用, 而且许多实际问题的应用都归结到$M$-矩阵的判定问题上, 因此, 讨论$M$-矩阵有着十分重要的意义. 本文给出了一个$Z$-矩阵为非奇异$M$-矩阵的若干充要条件, 所给条件在判定一个$Z$-矩阵是否为非奇异$M$-矩阵所需要的验证工作量方面, 优于文献[1]的相关结果.

记$N=\{1, 2, \cdots, n\}$, $M_n(C)$及$M_n(R)$分别表示所有$n$阶复矩阵和所有$n$阶实矩阵的集合, $R^n$表示所有$n$维实列向量的集合, $I$表示适当阶数的单位矩阵. 若$A$为$m\times n$矩阵, 则用$A^{\mathrm{T}}$表示矩阵$A$的转置矩阵. 若矩阵$A$的每个元素都是非负实数, 则称$A$为非负矩阵, 记为$A\geqslant 0$. 若$x\in R^n$, 则用$x_i$表示向量$x$的第$i$个分量, 而不再一一说明.

**定义 1**　设$Z_n=\{A=(a_{ij})\in M_n(R): a_{ij}\leqslant 0, i\neq j, i, j\in N\}$如果$A\in Z_n$, 则称$A$是$Z$-矩阵.

**定义 2**　设$A=(a_{ij})\in M_n(R)$, 若有$A=sI-B$, $s>0$, $B\geqslant 0$, 且$s>\rho(B)$, 其中$\rho(B)$为$B$的谱半径, 则称$A$是非奇异$M$-矩阵.

**定义 3**　设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$, 若有$n$个正数$d_1, d_2, \cdots, d_n$, 使得

$$d_i|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|d_j,\quad \forall i\in N$$

则称$A$为广义严格对角占优矩阵.

收稿日期: 2006-01-20

作者简介: 林美容(1976-), 女, 硕士研究生; 通讯联系人: 陈神灿, 教授.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2006J0180); 福建省教育厅科研资助项目(JA04157)

定义 4　设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, 令 $m_{ii} = |a_{ii}|$, $m_{ij} = -|a_{ij}|$ $i \neq j$, $i, j \in N$ 则称 $\mu(A) = (m_{ij})$ 为 $A$ 的比较矩阵.

引理 1[1]　设 $A \in Z_n$, 则下列命题彼此等价:

1) $A$ 是非奇异 $M$ − 矩阵.

2) 对任意 $0 \neq x \in R^n$, 存在 $i \in N$, 使得 $(Ax)_i x_i > 0$.

3) 对任意 $0 \neq x \in R^n$, 存在正对角矩阵 $D$ 使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$

4) 对任意 $0 \neq x \in R^n$, 存在非负对角矩阵 $D$ 使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$.

引理 2[1]　设 $A \in M_n(C)$, 则 $A$ 是广义严格对角占优矩阵的充要条件是 $\mu(A)$ 是非奇异 $M$ − 矩阵.

## 2　主要结果

定理 1　设 $A \in Z_n$, 则下列命题彼此等价:

1) $A$ 是非奇异 $M$ − 矩阵.

2) 对任意的非负非零 $n$ 维列向量 $x$, 存在 $i \in N$, 使得 $(Ax)_i x_i > 0$.

3) 对任意的非负非零 $n$ 维列向量 $x$, 存在非负对角矩阵 $D$ 使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$.

4) 对任意的非负非零 $n$ 维列向量 $x$, 存在正对角矩阵 $D$ 使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$

证明　由引理 1, 显然可得 1)⇒ 2), 1)⇒ 3), 1)⇒ 4).

2)⇒ 1): 由 $A \in Z_n$, 可设 $A = sI - B$, $s > 0$, $B \geqslant 0$, 设 $s \leqslant \rho(B)$, 由 Perron − Frobenius定理[1]知, 存在非负非零 $n$ 维列向量 $x$, 使得 $Bx = \rho(B)x$, 则

$$Ax = (sI - B)x = [s - \rho(B)]x \leqslant 0$$

从而 $(Ax)_i x_i \leqslant 0$　$\forall i \in N$, 此与 2) 矛盾, 从而 $s > \rho(B)$, 故 $A$ 是非奇异 $M$ − 矩阵.

3)⇒ 1): 由 $A \in Z_n$, 可设 $A = sI - B$, $s > 0$, $B \geqslant 0$, 由 Perron − Frobenius定理[1]知, 存在非负非零 $n$ 维列向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 使得 $x^{\mathrm{T}}B = \rho(B)x^{\mathrm{T}}$, 则

$$x^{\mathrm{T}}A = x^{\mathrm{T}}(sI - B) = [s - \rho(B)]x^{\mathrm{T}}$$

由 3) 知, 存在非负对角矩阵 $D$ 使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$ 记 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_i \geqslant 0$, $i \in N$, 则有

$$x^{\mathrm{T}}ADx = [s - \rho(B)]x^{\mathrm{T}}Dx = [s - \rho(B)](d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2) > 0$$

又因为 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 \geqslant 0$, 所以 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 > 0$, 从而 $s - \rho(B) > 0$, 即 $s > \rho(B)$ 故 $A$ 是非奇异 $M$ − 矩阵.

4)⇒ 1): 因为 4)⇒ 3) 显然, 所以由 3)⇒ 1) 知命题成立.

注: 给定一个 $n$ 阶 $Z$ − 矩阵$A$, 要判断矩阵 $A$ 是否为非奇异 $M$ − 矩阵, 而去验证矩阵 $A$ 是否满足本文中定理 1的条件 2)、3)、4), 所需要的计算量显然要比去验证是否满足引理 1中的条件 2)、3)、4) 要少得多. 作为定理 1的一个简单应用, 可得到推论 1, 它是一个经常被使用的关于一个复方阵是广义严格对角占优矩阵的必要条件.

推论 1[2]　设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ 为广义严格对角占优矩阵, 则至少存在一个 $i \in N$, 使得

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

证明　因为 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ 为广义严格对角占优矩阵, 所以据引理 2, 知 $\mu(A)$ 是非奇异 $M$ − 矩阵. 对于 $n$ 维正的列向量 $x = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, 据定理 1的 1) 与 2) 的等价性知, 存在 $i \in N$, 使得 $[\mu(A)x]_i x_i > 0$, 则有 $[\mu(A)x]_i > 0$, 即

$$-|a_{i1}| - \cdots - |a_{i,i-1}| + |a_{ii}| - |a_{i,i+1}| - \cdots - |a_{in}| > 0$$

因此,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

当已知 $n$阶 $Z$ − 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的所有主对角元都非负时, 下面的两个条件是等价的: ① 对任意非

负非零的 $n$维列向量 $x$, 都存在 $i\in N$, 使得 $(Ax)_i x_i > 0$; ②对任意非负非零的 $n$维列向量 $x$, 都存在 $i\in N$, 使得 $(Ax)_i > 0$.

事实上, ①⇒②是显然成立的; 现设条件②成立, 则存在 $i\in N$, 使得 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > 0$, 由 $a_{ii}x_i > -\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j \geqslant 0$, $a_{ii}\geqslant 0$, 则有 $x_i > 0$. 因此在这种情形下, 可以把定理 1改进为如下形式.

**推论 2**　已知 $Z$-矩阵 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$的所有主对角元都为非负实数, 则 $A$是非奇异 $M$-矩阵的充要条件, 对任意非负非零的 $n$维列向量 $x$, 都存在 $i\in N$, 使得 $(Ax)_i > 0$.

文献[3]利用凸集分离原理得到了该文的主要结果也就是推论 3, 其实由引理 2以及推论 2的否命题便可立即得出.

**推论 3**[3]　设 $B\in M_n(C)$, $A$为 $B$的比较矩阵, 则 $B$不是广义严格对角占优矩阵的充要条件是存在非负非零 $n$维列向量 $x$, 使得 $Ax\leqslant 0$.

**定理 2**　设 $A\in Z_n$且不可约, 则下列命题彼此等价:

1) $A$是非奇异 $M$-矩阵.

2) 对任意正的 $n$维列向量 $x$, 存在 $i\in N$, 使得 $(Ax)_i > 0$.

3) 对任意正的 $n$维列向量 $x$, 存在非负对角矩阵 $D$使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$.

4) 对任意正的 $n$维列向量 $x$, 存在正对角矩阵 $D$使得 $x^{\mathrm{T}}ADx > 0$.

证明　由引理 1显然可得 1)⇒2), 1)⇒3), 1)⇒4).

2)⇒1): 由 $A\in Z_n$, 可设 $A=sI-B$, $s>0$, $B\geqslant 0$. 设 $s\leqslant\rho(B)$, 由 $A$不可约得 $B$也不可约, 即 $B$为非负不可约矩阵. 由 Perron-Frobenius定理[1]知, 存在正的 $n$维列向量 $x$, 使得 $Bx=\rho(B)x$, 则

$$Ax=(sI-B)x=[s-\rho(B)]x\leqslant 0$$

从而 $(Ax)_i\leqslant 0$　$\forall i\in N$, 此与 2)矛盾, 从而 $s>\rho(B)$, 故 $A$是非奇异 $M$-矩阵.

3)⇒1): 由 $A\in Z_n$, 可设 $A=sI-B$, $s>0$, $B\geqslant 0$. 由 $A$不可约得 $B$也不可约, 即 $B$为非负不可约矩阵. 由 Perron-Frobenius定理[1]知, 存在正的 $n$维列向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 使得 $x^{\mathrm{T}}B=\rho(B)x^{\mathrm{T}}$, 则

$$x^{\mathrm{T}}A=x^{\mathrm{T}}(sI-B)=[s-\rho(B)]x^{\mathrm{T}}$$

由 3)知, 存在非负对角矩阵 $D$使得 $x^{\mathrm{T}}ADx>0$. 记 $D=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_i\geqslant 0$, $i\in N$, 则有

$$x^{\mathrm{T}}ADx=[s-\rho(B)]x^{\mathrm{T}}Dx=[s-\rho(B)](d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2)>0$$

又因为 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2\geqslant 0$所以 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2>0$, 从而 $s-\rho(B)>0$, 即 $s>\rho(B)$, 故 $A$是非奇异 $M$-矩阵.

4)⇒1): 4)⇒3)显然, 由 3)⇒1)知命题成立.

## 参考文献:

[1] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

[2] 逄明贤. 广义对角占优矩阵的判定及应用[J]. 数学年刊: A辑, 1985, 6(3): 323-330.

[3] 董安国, 封建湖. 广义对角占优矩阵判别的一个充要条件[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5): 947-950.