

# 端点系有集中质量的弹性杆振动问题

程利青

(福州大学电子科学与应用物理系, 福建 福州 350002)

摘要: 端点系有集中质量的弹性杆的振动问题的边条件不是斯特姆-刘维本征值问题所要求的边条件, 函数系  $\{X_n(x)\}$  不是正交函数系, 求解十分困难. 通过提出一种变换, 将其边条件化为第 1 类、第 2 类或第 3 类边条件, 此时  $\{X_n(x)\}$  为正交完备函数系, 问题大为简化. 最后给出了几种不同的端点情况下的此类问题的解.

关键词: 边界条件; 本征值问题; 本征函数; 固有频率  
中国分类号: TB123 文献标识码: A

文献[1] ~ [4] 对一端固定, 另一端系有集中质量的弦的振动问题的解法比较复杂, 计算量也比较大. 本文提出一种方法, 只要作一个简单的变换就能将边界条件化为斯-刘本征值问题所要求的第 1 类、第 2 类或第 3 类边界条件, 新的定解问题的本征函数系  $\{X_n(x)\}$  为正交完备的函数系, 问题大为简化.

## 1 一端固定, 另一端系有集中质量为 $M$ 的弹性杆的振动问题

定解问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0, (u_x + C^2 u_{tt})|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (1)$$

其中:  $C^2 = \frac{M}{YS}$ ,  $Y$  为材料的杨氏模量,  $S$  为杆的横截面积.

令  $v(x, t) = u_x(x, t)$ , 得到  $v$  的定解问题.

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi'(x), v_t|_{t=0} = \psi'(x) \\ v_x|_{x=0} = 0, (v + a^2 C^2 v_x)|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (2)$$

本征值  $\lambda_n$  为方程  $\cot \sqrt{\lambda} l = a^2 C^2 \sqrt{\lambda}$  的第  $n$  个正根,  $n = 1, 2, \dots$ , 本征函数  $X_n \sim \cos \sqrt{\lambda_n} x$ .

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \cos \sqrt{\lambda_n} x \quad (3)$$

$$A_n = \frac{\varphi(l) \cos \sqrt{\lambda_n} l + \sqrt{\lambda_n} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi}{\frac{1}{2} (l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n})} \quad (4)$$

收稿日期: 1999-11-05

作者简介: 程利青(1944-), 男, 副教授.

基金项目: 福建省教委基金资助项目(JB98007)

$$B_n = \frac{\psi(l)\cos \sqrt{\lambda_n}l + \sqrt{\lambda_n} \int_0^l \psi(\xi)\sin \sqrt{\lambda_n}\xi d\xi}{\sqrt{\lambda_n}a \cdot \frac{1}{2} \left( l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n} \right)} \quad (5)$$

(3)式两边对  $x$  积分, 得:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a^2 C^2 \varphi(l)\sin \sqrt{\lambda_n}l + \int_0^l \varphi(\xi)\sin \sqrt{\lambda_n}\xi d\xi}{\frac{1}{2} \left( l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n} \right)} \cos \sqrt{\lambda_n}at + \frac{a^2 C^2 \psi(l)\sin \sqrt{\lambda_n}l + \int_0^l \psi(\xi)\sin \sqrt{\lambda_n}\xi d\xi}{\sqrt{\lambda_n}a \cdot \frac{1}{2} \left( l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n} \right)} \sin \sqrt{\lambda_n}at \right] \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (6)$$

以上  $u$  对  $x$  或  $t$  求偏导等的处理方法, 对  $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$  应有一定的要求<sup>[5-8]</sup>. 结果与其它文献相同, 但简便了许多. 下面分析式子.

$$\cot \sqrt{\lambda_n}l = a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n} = \frac{M}{\rho S l} \sqrt{\lambda_n}l \quad (7)$$

当  $x = 0$  端固定,  $x = l$  端自由, 即(7)式中  $M = 0$ , 则  $\sqrt{\lambda_n}l = (n - 0.5)\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 本征频率  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}a = \frac{(n - 0.5)\pi}{l}a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); 而当  $M \neq 0$

时, 上述超越方程  $\cot \sqrt{\lambda}l = a^2 C^2 \sqrt{\lambda}$  的解可由数值解法或图解法求得.

所求  $\sqrt{\lambda_n}l$  的值为图 1 的余切曲线与直线交点的横坐标值, 它分别小于  $(n - 0.5)\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 可见, 当自由端系上集中质量  $M$  后各阶固有频率都比原来降低, 且  $M$  越大直线斜率越大, 固有频率降低越显著.

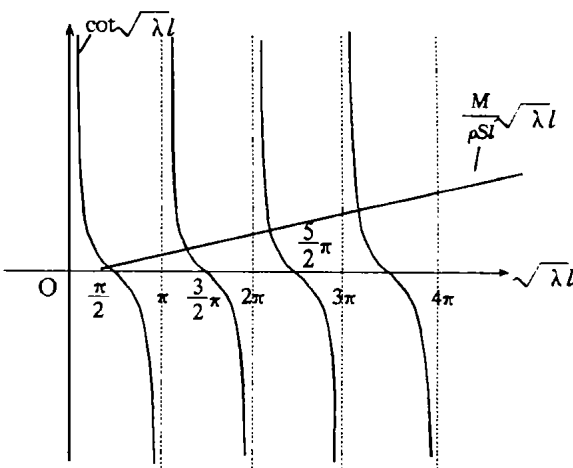


图 1 第 1 种情况求  $\sqrt{\lambda_n}l$  的图解法

## 2 一端自由, 另一端系有集中质量为 $M$ 的弹性杆的振动问题

定解问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = 0, (u_x + C^2 u_{tt})|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (8)$$

令  $v(x, t) = u_x(x, t)$ ,  $v$  的定解问题为:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi'(x), v_t|_{t=0} = \psi'(x) \\ v|_{x=0} = 0, (v + a^2 C^2 v_x)|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (9)$$

本征值  $\lambda_n$  为方程  $\tan \sqrt{\lambda}l = -a^2 C^2 \sqrt{\lambda}$  的第  $n$  个正根,  $n = 1, 2, \dots, X_n(x) \sim \sin \sqrt{\lambda_n}x$ .

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B'_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \sin \sqrt{\lambda_n} x \tag{10}$$

$$A'_n = \frac{\varphi(l) \sin \sqrt{\lambda_n} l - \sqrt{\lambda_n} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi}{\frac{1}{2} (l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n})} \tag{11}$$

$$B'_n = \frac{\psi(l) \sin \sqrt{\lambda_n} l - \sqrt{\lambda_n} \int_0^l \psi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi}{\sqrt{\lambda_n} a \cdot \frac{1}{2} (l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n})} \tag{12}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B'_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \frac{-\cos \sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{\lambda_n}} + c(t) \tag{13}$$

从物理上看, 无穷级数部分反映杆的振动, 而与  $x$  无关的  $c(t)$  则反映端点带集中质量  $M$  的杆整体所作的匀速直线运动, 故  $c(t) = A_0 + B_0 t$ . 也可以从  $u$  的定解问题分离变数, 其本征值问题当  $\lambda = 0$  时的本征解为  $A_0 + B_0 t$  得出  $c(t)$  的表式.

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B'_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \frac{-\cos \sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{14}$$

$$= A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \cos \sqrt{\lambda_n} x \tag{14}$$

$$\begin{cases} A_0 = \frac{a^2 C^2 \varphi(l) + \int_0^l \varphi(\xi) d\xi}{l + a^2 C^2} \\ B_0 = \frac{a^2 C^2 \psi(l) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi}{l + a^2 C^2} \end{cases} \tag{15}$$

$A_0$ 、 $B_0$  分别为杆上各点和端点的集中质量  $M$  的初位移、初速度的平均值. 若  $A_0$ 、 $B_0$  不为零时, 则杆整体以初位移  $A_0$ , 速度  $B_0$  作匀速直线运动; 而当杆与质量  $M$  原先静止地处于平衡位置时, 则  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = 0$ , 此时仅有振动部分. 将式(11)、(12)、(15)代入式(14), 得到:

$$u(x, t) = \frac{a^2 C^2 \varphi(l) + \int_0^l \varphi(\xi) d\xi}{l + a^2 C^2} + \frac{a^2 C^2 \psi(l) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi}{l + a^2 C^2} t \tag{16}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a^2 C^2 \varphi(l) \cos \sqrt{\lambda_n} l + \int_0^l \varphi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi}{\frac{1}{2} (l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n})} \cos \sqrt{\lambda_n} at \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{a^2 C^2 \psi(l) \cos \sqrt{\lambda_n} l + \int_0^l \psi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi}{\sqrt{\lambda_n} a \cdot \frac{1}{2} (l + \frac{a^2 C^2}{1 + a^4 C^4 \lambda_n})} \sin \sqrt{\lambda_n} at \right] \cos \sqrt{\lambda_n} x$$

分析式子:

$$\tan \sqrt{\lambda_n} l = - a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n} = - \frac{M}{\rho S l} \sqrt{\lambda_n} l \tag{17}$$

当  $x = 0$  端自由,  $x = l$  端也为自由端时 (即上式中  $M = 0$ ), 则  $\sqrt{\lambda_n}l = n\pi, n = 1, 2, \dots$ , 本征频率  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}a = n\pi a/l, n = 1, 2, \dots$ ; 当  $M \neq 0$ , 超越方程的解可由图解法得.

$\sqrt{\lambda_n}l$  的值为正切曲线与直线交点的横坐标值, 从图 2 可看到, 它分别小于  $n\pi, n = 1, 2, \dots$ . 可见, 当  $x = l$  端系有集中质量  $M$  后, 系统各阶的固有频率都比原来降低, 且  $M$  越大固有频率降低越显著.

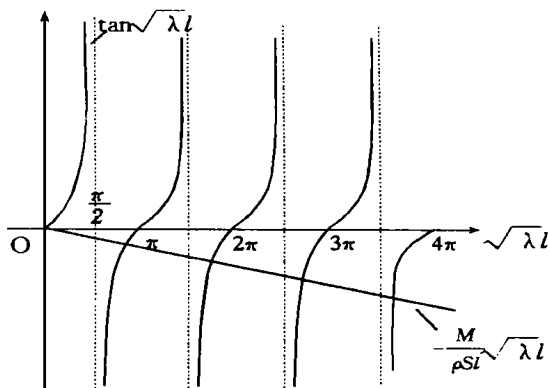


图 2 第 2 种情况求  $\sqrt{\lambda_n}l$  的图解法

### 3 两端均系有集中质量为 $M$ 的弹性杆的振动问题

定解问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ (u_x - C^2 u_{tt})|_{x=0} = 0, (u_x + C^2 u_{tt})|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

令  $v(x, t) = u_x(x, t)$ ,  $v$  的定解问题为:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi'(x), v_t|_{t=0} = \psi'(x) \\ (v - a^2 C^2 v_x)|_{x=0} = 0, (v + a^2 C^2 v_x)|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (19)$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - a^2 C^2 X'(0) = 0, X(l) + a^2 C^2 X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$X = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x \quad (20)$$

$$\tan \sqrt{\lambda}l = \frac{2a^2 C^2 \sqrt{\lambda}}{a^4 C^4 \lambda - 1} \quad (21)$$

设  $\lambda_n$  为此超越方程的第  $n$  个正根,  $n = 1, 2, \dots$ , 则:

$$X_n \sim \cos \sqrt{\lambda_n}x + \frac{1}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (22)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos \sqrt{\lambda_n}at + B'_n \sin \sqrt{\lambda_n}at) (\cos \sqrt{\lambda_n}x + \frac{1}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}x) \quad (23)$$

$$A'_n = \frac{\varphi(l) (\cos \sqrt{\lambda_n}l + \frac{1}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}l) - \varphi(0) - \int_0^l (\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} \xi}{a^2 C^2} - \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \xi) \varphi(\xi) d\xi}{\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{a^4 C^4 \lambda_n}) + \frac{1}{a^2 C^2 \lambda_n}} \quad (24)$$

$$B'_n = \frac{\psi(l) (\cos \sqrt{\lambda_n}l + \frac{1}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}l) - \psi(0) - \int_0^l (\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} \xi}{a^2 C^2} - \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \xi) \psi(\xi) d\xi}{\sqrt{\lambda_n}a \cdot [\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{a^4 C^4 \lambda_n}) + \frac{1}{a^2 C^2 \lambda_n}]} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B'_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x}{a^2 C^2 \lambda_n} \right) + A_0 + B_0 t \\
 &= A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at) \left( \sin \sqrt{\lambda_n} x - \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \right) \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 A_0 = \frac{a^2 C^2 [\varphi(0) + \varphi(l)] + \int_0^l \varphi(\xi) d\xi}{l + 2a^2 C^2} \\
 B_0 = \frac{a^2 C^2 [\psi(0) + \psi(l)] + \int_0^l \psi(\xi) d\xi}{l + 2a^2 C^2}
 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{a^2 C^2 [\varphi(0) + \varphi(l)] + \int_0^l \varphi(\xi) d\xi}{l + 2a^2 C^2} + \frac{a^2 C^2 [\psi(0) + \psi(l)] + \int_0^l \psi(\xi) d\xi}{l + 2a^2 C^2} t \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(l) \left( \cos \sqrt{\lambda_n} l + \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} l}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \right) - \varphi(0) - \int_0^l \left( \frac{1}{a^2 C^2} \cos \sqrt{\lambda_n} \xi - \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \xi \right) \varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{\lambda_n} \cdot \left[ \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{a^4 C^4 \lambda_n} \right) + \frac{1}{a^2 C^2 \lambda_n} \right]} \cos \sqrt{\lambda_n} at \right. \\
 &+ \left. \frac{\psi(l) \left( \cos \sqrt{\lambda_n} l + \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} l}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \right) - \psi(0) - \int_0^l \left( \frac{1}{a^2 C^2} \cos \sqrt{\lambda_n} \xi - \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \xi \right) \psi(\xi) d\xi}{\sqrt{\lambda_n} a \cdot \left[ \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{a^4 C^4 \lambda_n} \right) + \frac{1}{a^2 C^2 \lambda_n} \right]} \sin \sqrt{\lambda_n} at \right\} \\
 &\times \left( \sin \sqrt{\lambda_n} x - \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x}{a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}} \right) \quad (28)
 \end{aligned}$$

分析式子:

$$\tan \sqrt{\lambda_n} l = \frac{2a^2 C^2 \sqrt{\lambda_n}}{a^4 C^4 \lambda_n - 1} = \frac{2(M/\rho S l) \sqrt{\lambda_n} l}{(M/\rho S l)^2 (\sqrt{\lambda_n} l)^2 - 1} \quad (29)$$

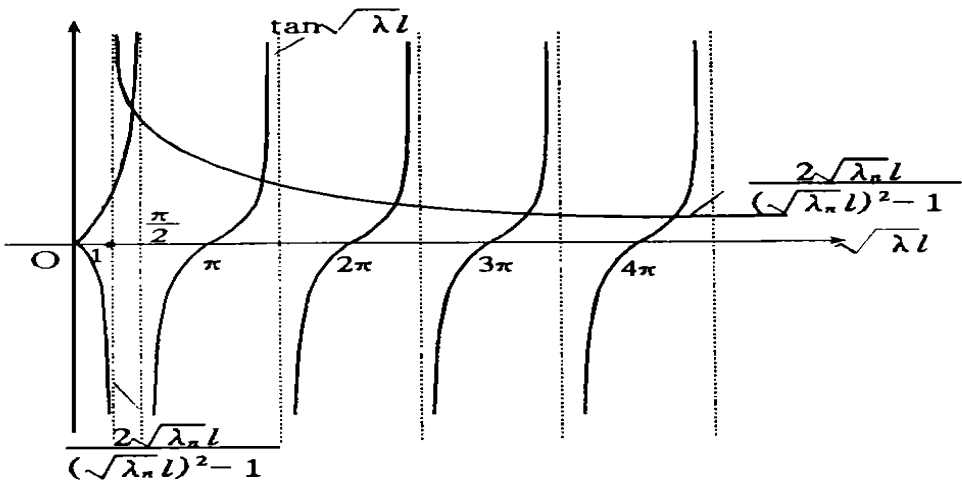


图 3 第 3 种情况求  $\sqrt{\lambda_n} l$  的图解法

若  $M = \rho SI$ , 即端点的集中质量  $M$  等于弹性杆的质量, 此时  $\tan \sqrt{\lambda_n} l = \frac{2\sqrt{\lambda_n} l}{(\sqrt{\lambda_n} l)^2 - 1}$ ,  $\sqrt{\lambda_n} l$

的值可由图解法求得. 从图 3 可看到  $\sqrt{\lambda_n} l$  的值分别小于两端均为自由端时的值  $n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 其相应的各阶固有频率  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} a$  均小于  $n\pi a/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 而且  $M$  越大降低越显著.

### 参考文献:

- [ 1 ] 倪振华. 振动力学 [ M ]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989. 359—366.
- [ 2 ] 吉洪诺夫, 萨马尔斯基. 数学物理方程 [ M ]. 黄克欧等译. 北京: 人民教育出版社, 1956. 151—157.
- [ 3 ] 徐世良. 数学物理方法解题分析 [ M ]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1983. 519—526.
- [ 4 ] 布达克, 萨马尔斯基, 吉洪诺夫. 数学物理题解 [ M ]. 张石生等译. 重庆: 科学技术文献出版社重庆分社, 1982. 267—268.
- [ 5 ] 郭友中, 李清溪. 数学物理方法 [ M ]. 武汉: 武汉大学出版社, 1993. 154—157.
- [ 6 ] Tyn Myint-U. 数学物理方程 [ M ]. 杨华钧等译. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985. 122—128.
- [ 7 ] 何淑芷, 陈启流. 数学物理方法 [ M ]. 广州: 华南理工大学出版社, 1994. 289—290.
- [ 8 ] 苏煜城. 数学物理方程 [ M ]. 北京: 气象出版社, 1998. 19—22.

## Oscillation problem on elastic rod with central mass on end

CHENG Li-qing

(Department of Electronic Science and Applied Physics, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China)

**Abstract:** It's very difficult to solve the oscillation problem of elastic rod with central mass on end because the boundary condition in this case is not the one required by Sturm—livouville eigen value and the functions  $\{X_n(x)\}$  are not orthogonal ones. This paper simplifies the problem by presenting a transformation, with which the boundary condition is changed to the boundary condition of first class, second class or third class and then the functions  $\{X_n(x)\}$  are orthogonal complete functions. Some solutions to such problems with different ends are discussed in this paper.

**Keywords:** boundary condition; eigen value; eigen function; natural frequency