第22卷 第5期 福州大学学报(自然科学版) Vol.22 No.5
1994年 10月 Journal of Fuzhou University (Natural Science) Oct. 1994

二次保凸插值样条存在的充要条件

孙道勋
(福州大学数学系, 福州, 350002)

摘 要 讨论二次插值样条的保凸性问题, 当给定型值点为P_0, P_1, P_2, …, P_m 共$n+1$个时, 导出通过此组型值点的二次插值样条存在的充要条件.

关键词 二次插值样条; 保凸性; 充要条件

1 二次插值样条函数的定义

二次样条是由正抛物线逐段连接而成的, 在相接点处要求达到切线连续的 $C^1[a, b]$类曲线. 用它插值则保凸性较好, 而且能够直接与配有正抛物线插补功能的绘图机或数控机床配套. 下面叙述二次插值样条函数的定义. 设 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$ 是有限区间 $[a, b]$的一个分划, 对于分点记 $h_i=x_i-x_{i-1}$, $\lambda_i=h_{i+1}/(h_i+h_{i+1})$, $\mu_i=h_i/(h_i+h_{i+1})$, 小区间 $[x_{i-1}, x_i]$的中点 $(x_{i-1}+x_i)/2$ 记为 $x_{i-\frac{1}{2}}$, 且规定 $x_{-\frac{1}{2}}=x_0$, $x_{N+\frac{1}{2}}=x_N$, 把这些中点称为半结点. 又设 y_0, y_1, y_2, …, y_N 为一组给定的型值, 定义在区间 $[a, b]$上的分段二次多项式函数 $S(x)$, 如果它满足下列条件, 就称为二次插值样条函数: ①$S(x)\in C_1[a, b]$; ② 在每一小区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ $(i=0, 1, 2, \cdots, N)$ 上 $S(x)$ 是二次多项式; ③ 在插值结点 x_i $(i=0, 1, 2, \cdots, N)$ 处 $S(x_i)=y_i$, 此处插值结点与二次样条的结点是交错排列的. 满足上述条件的函数 $S(x)$ 的表达式是易于寻求的. 设插值结点 x_i 处函数 $S(x)$ 的一阶导数和二阶导数分别记为 m_i, M_i, 在小区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$上, $S(x)$是二次多项式应具有下列表达式:

$$S(x)=y_i+m_i(x-x_i)+\frac{1}{2}M_i(x-x_i)^2 \quad x\in[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \quad (i=0, 1, 2, \cdots, N)$$

由于假定 $S(x)\in C^1[a, b]$, 在半结点 $x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处应达到一阶导数连续, 故成立下列连续性条件:

$$\begin{cases} y_i-\frac{1}{2}m_ih_i+\frac{1}{2}M_ih_i^2=y_{i-1}+\frac{1}{2}m_{i-1}n_i+\frac{1}{2}M_{i-1}h_i^2 \\ m_i-\frac{1}{2}M_ih_i=m_{i-1}+\frac{1}{2}M_{i-1}h_i \quad (i=1, 2, \cdots, N) \end{cases}$$

本文收到日期: 1993-03-30
孙道勋, 男, 1935 年出生, 副教授

从上述连续性条件，可解出一阶导数 m_{i-1}，m_i，并加以比较，不难得到插值结点 x_i 处的二阶导数 M_i 之间的关系式：

$$\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

式中：$d_i = \dfrac{8}{h_i h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$ 是二阶差商的 8 倍．上式是 $N+1$ 个未知数 M_0，M_1，$\cdots$，M_N 的 $N-1$ 个方程的线代数方程组，因此通过型值点组 $P_0(x_0,\ y_0)$，$P_1(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$P_N(x_N,\ y_N)$ 的二次插值样条函数 $S(x)$ 在插值结点处的二阶导数 M_0，M_1，$\cdots$，M_N 应满足上述不定方程组．如果二次插值样条函数在端点 x_0，x_N 处满足下列端点条件：$3M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0$，$\mu_N M_{N-1} + 3M_N = d_N$．那末就构成一个含 $N+1$ 个未知数，$N+1$ 个方程的方程组．把此方程组写成下列矩阵的形式．

$$\begin{bmatrix} 3 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 3 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & \mu_{N-1} & 3 & \lambda_{N-1} \\ & & & \mu_N & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \tag{1}$$

此方程组简记为 $A_1 M = D$，只要解方程组 (1) 求得二阶导数 $M_0 \sim M_N$，就能在小区间上逐段写出二次插值样条函数 $S(x)$ 的显式表达式[1]．

2 二次插值样条保凸性的提法

设给定型值点组 P_0，P_1，$\cdots$，P_N，将其连成折线，先经过初光顺，使相邻 3 个型值点处的二阶差商的正负号顺序不能变号两次，本文限于讨论这种型值点组．点点通过型值点组 $P_0 \sim P_N$ 的二次插值样条可有无穷多条，要寻求保凸的二次插值样条不是容易的事，所谓保凸插值包含两方面的内容：其一是由经过初光顺的型值点组连成的折线其凹凸形状要能体现出原来被插曲线 $f(x)$ 的凹凸形状；其次是要求二次插值样条能够保持型值点折线的凹凸形状．

对于每一条给定的型值点折线可以把它划分成几段，使每一段的形状为凸的、凹的或凹凸相间、其中有一个拐点等 4 种基本类型．仅对上述 4 种基本类型的折线分别叙述其二次插值样条函数的保凸性要求：

对于凸型折线（或凹型）这种型值点组，要求通过这些型值点的二次插值样条函数在型值点 P_i 处的二阶导数 $M_i \leqslant 0$（或 $M_i \geqslant 0$）$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$．如果不希望在二次插值样条上出现直线段就要求相邻的两个二阶导数 M_i，M_{i+1} 不同时为零．对于凸凹折线这样的型值点组则要求二次插值样条在型值点处的二阶导数 $M_0 \leqslant 0$，$M_1 \leqslant 0$，$\cdots$，$M_{i-1} \leqslant 0$，$M_i < 0$，$M_{i+1} > 0$，$M_{i+2} \geqslant 0$，$\cdots$，$M_N \geqslant 0$，要注意折线中的 d_i，d_{i+1} 均不为零．

3 任意个型值点的二次保凸插值样条的存在性

设型值点组为 $P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_1, y_1)$，…，$P_N(x_N, y_N)$，通过各点的二次插值样条的二阶导数 $M_0 \sim M_N$ 满足线性代数方程组 $A_1 M = D$. 将此方程组的系数矩阵 A_1 分解为：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \mu_1/3 & 3/(h_1+h_2) & 0 & & & \\ & & 3/(h_2+h_3) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 3/(h_{N-1}+h_N) & \lambda_{N-1}/3 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 3 & \lambda_0 & & & & \\ 0 & h_1+h_2-\lambda_0 h_1/9 & h_2/3 & & & \\ & h_2/3 & h_2+h_3 & h_3/3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & h_{N-1}/3 & h_{N-1}+h_N-\mu_N h_N/9 & 0 \\ & & & & \mu_N & 3 \end{bmatrix}$$

上式简记为 $A_1 = A_0 A'$. 今以矩阵 A_0 的逆矩阵 A_0^{-1} 左乘方程组 $A_1 M = D$ 的两边，则 $A'M = A_0^{-1} D$ 将此方程组展开，划去其首尾两个等式，得到下列低二阶的方程组：

$$\begin{bmatrix} h_1+h_2 & h_2/3 & & & \\ h_2/3 & h_2+h_3 & h_3/3 & & \\ & & \ddots & & \\ & h_{N-2}/3 & h_{N-2}+h_{N-1} & h_{N-1}/3 & \\ & & & h_{N-1}/3 & h_{N-1}+h_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\lambda_0 h_1/9 & & \\ & \ddots & \\ & & -\mu_N h_N/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 d_0/9 + (h_1+h_2) d_1/3 \\ (h_2+h_3) d_2/3 \\ \vdots \\ (h_{N-2}+h_{N-1}) d_{N-2}/3 \\ (h_{N-1}+h_N) d_{N-1}/3 - h_N d_N/9 \end{bmatrix}$$

将上式左边第一个矩阵记为 H，且记其逆矩阵 $H^{-1} = [a_{ij}]$，以 H^{-1} 左乘上式的两边，得到：

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_0 h_1 a_{11}/9 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_N h_N a_{1\,N-1}/9 \\ -\lambda_0 h_1 a_{21}/9 & 1 & & & -\mu_N h_N a_{2\,N-1}/9 \\ & & 1 & \ddots & \\ \lambda_0 h_1 a_{N-1\,1}/9 & 0 & & 0 & 1-\mu_N h_N a_{N-1\,N-1}/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= h^{-1} \begin{bmatrix} -h_1 d_0/9 + (h_1+h_2) d_1/3 \\ (h_2+h_3) d_2/3 \\ \vdots \\ (h_{N-2}+h_{N-1}) d_{N-2}/3 \\ (h_{N-1}+h_N) d_{N-1}/3 - h_N d_N/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{N-2} \\ e_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中 a_{11}, a_{21}, …, $a_{N-1\,1}$, $a_{1\,N-1}$, $a_{2\,N-1}$, …, $a_{N-1\,N-1}$ 是逆矩阵 h^{-1} 首尾两列的元素，将上式展开，得到：

$$[M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}]^{\mathrm{T}} = [e_1, e_2, \cdots, e_{N-1}]^{\mathrm{T}} + \frac{h_1}{9}(d_0 - 3M_0)[a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{N-11}]^{\mathrm{T}}$$
$$+ \frac{h_N}{9}(d_N - 3M_N)[a_{1\,N-1}, a_{2\,N-1}, \cdots, a_{N-1\,N-1}]^{\mathrm{T}}$$

现在来计算列向量 $[e_1, e_2, \cdots, e_{N-1}]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{N-1} \end{bmatrix} = h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} d_1 \\ \frac{h_2+h_3}{3} d_2 \\ \vdots \\ \frac{h_{N-1}+h^N}{3} d_{N-1} \end{bmatrix} - \frac{h_1}{9} d_0 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{N-1\,1} \end{bmatrix} - \frac{h_N}{9} h_N \begin{bmatrix} a_{1\,N-1} \\ a_{2\,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1\,N-1} \end{bmatrix}$$

将 $[e_1, e_2, \cdots, e_{N-1}]^{\mathrm{T}}$ 的表达式代入(2)式中有:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{bmatrix} = h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} d_1 \\ \frac{h_2+h_3}{3} d_2 \\ \vdots \\ \frac{h_{N-1}+h_N}{3} d_{N-1} \end{bmatrix} - \frac{h_1}{3} M_0 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{N-1\,1} \end{bmatrix} - \frac{h_N}{3} M_N \begin{bmatrix} a_{1\,N-1} \\ a_{2\,N-1} \\ \vdots \\ a_{N-1\,N-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

由于 $h^{-1}=h^{*}/H_{1N}$ ，$a_{ij}=a_{ij}^{*}/H_{1N}$ ，此处 h^{*} 为 h 的伴随矩阵，H_{1N} 为对应于矩阵 h 的行列式．将 $h^{-1}=h^{*}/H_{1N}$，代入 (3) 式中，有：

$$H_{1N}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{bmatrix} = h^{*}\begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3}d_1 \\ \frac{h_2+h_3}{3}d_2 \\ \vdots \\ \frac{h_{N-1}+h^{N}}{3}d_{N-1} \end{bmatrix} - \frac{h_1}{3}M_0\begin{bmatrix} a_{11}^{*} \\ a_{21}^{*} \\ \vdots \\ a_{N-11}^{*} \end{bmatrix} - \frac{h_N}{3}M_N\begin{bmatrix} a_{1\,N-1}^{*} \\ a_{2\,N-1}^{*} \\ \vdots \\ a_{N-1\,N-1}^{*} \end{bmatrix}$$

此处 $H_{1N}>0$，对于型值点组 $P_0\sim P_N$，设 $d_1\leqslant 0$，$d_2\leqslant 0$，…，$d_{N-1}\leqslant 0$，令：

$$\begin{cases} M_0\leqslant 0 \\ h^{*}\left[\frac{h_1+h_2}{3}d_1,\ \frac{h_2+h_3}{3}d_2,\ \cdots,\ \frac{h_{N-1}+h^{N}}{3}d_{N-1}\right]^{\mathrm{T}} \\ \quad\leqslant \frac{h_1}{3}M_0\left[a_{11}^{*},\ a_{21}^{*},\ \cdots,\ a_{N-11}^{*}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{h_N}{3}M_N\left[a_{1\,N-1}^{*},\ a_{2\,N-1}^{*},\ \cdots,\ a_{N-1\,N-1}^{*}\right]^{\mathrm{T}} \\ M_N\leqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

(4) 式就是通过型值点 $P_0\sim P_N$ 的二次插值样条保上凸的充要条件．上述讨论归结为定理：

定理 1 当型值点组 $P_0(x_0,\ y_0)$，$P_1(x_1,\ y_1)$，…，$P_N(x_N,\ y_N)$ 给定时，通过这组型值点的二次插值样条 $S(x)$ 在内结点 x_1，x_2，…，x_{N-1} 处的二阶导数 M_1，M_2，…，M_{N-1} 可由端点的 2 个二阶导数 M_0、M_N 线性表出，其表达式有如 (3) 式．

定理 2 给定型值点组 $P_0\sim P_N$，且 $d_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$ 都不是正数，则通过这组型值点的保凸二次插值样条存在的充要条件是线性不等式组 (4) 有解．

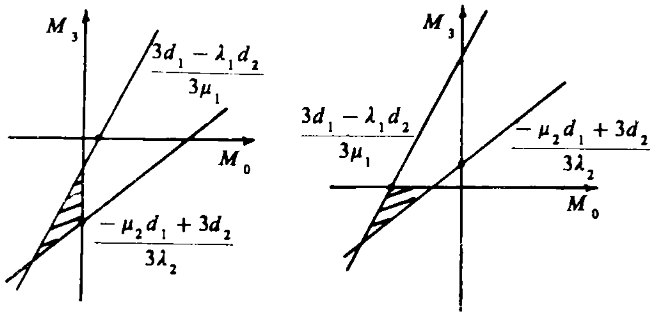
(4) 式中的线性不等式组的解，可由线性不等式相容性理论[3] 解出，但更方便的是图解法．式中矩阵 h 的伴随矩阵 h^{*} 亦可求得其表达式．

4 不超过四个型值点的二次保凸插值样条函数存在

通过型值点组 $P_0\sim P_N$ 的二次插值样条有无穷多条，但是满足保凸性要求的二次插值样条有时竟一条也没有．对插值样条暂不提出端点条件，而以样条的保凸性代之，来讨论二次保凸插值样条的存在．当这种保凸的样条存在时继而引进端点条件以便唯一确定它．为此对第 2 节中提出的 4 种基本形状的型值点组，讨论点点通过它们的二次保凸插值样条函数的存在．先讨论型值点折线为上凸的形状，且型值点个数不超过 4 个．如当 $N=3$ 时，设型值点为 P_0，P_1，P_2，P_3 且 $d_1\leqslant 0$，$d_2\leqslant 0$，则过上述型值点的二次保凸插值样条的二阶导数满足方程组：$3M_0+\lambda_0M_1=d_0$；$\mu_1M_0+3M_1+\lambda_1M_2=d_1$；$\mu_2M_1+3M_2+\lambda_2M_3=d_2$；$\mu_3M_2+3M_3=d_3$．由 (2)、(3) 两式求得：$M_1=(3d_1-3\mu M_0-\lambda_1d_2$

$+\lambda_1\lambda_2M_3)/(q-\lambda_1\mu_2)$，$M_2=(3d_2-3\lambda_2M_3-\mu_2d_1+\mu_1\mu_2M_0)/(q-\lambda_1\mu_2)$，于是 $M_0\leqslant 0$，$3d_1-\lambda_1d_2\leqslant 3\mu_1M_0-\lambda_1\lambda_2M_3$，$-\mu_2d_1+3d_2\leqslant-\mu_1\mu_2M_0+3\lambda_2M_3$，$M_3\leqslant 0$ 是通过 $P_0\sim P_3$ 的二次保凸插值样条存在的充要条件．

现在讨论上述线性不等式组的解，由于 $\lambda_1\mu_1\mu_2M_0-\lambda_1\mu_2d_1+3\lambda_1d_2\leqslant 3\lambda_1\lambda_2M_3\leqslant 9\mu_1M_0-9d_1+3\lambda_1d_2$，令 $\lambda_1\mu_1\mu_2M_0-\lambda_1\mu_2d_1+3\lambda_1d_2\leqslant 9\mu_1M_0-9d_1+3\lambda_1d_2$，解得 $M_0\geqslant\dfrac{d_1}{\mu_1}$，再令 $\lambda_1\mu_1\mu_2M_0-\lambda_1\mu_2d_1+3\lambda_1d_2\leqslant 0$，解得 $M_0\leqslant\dfrac{d_1}{\mu_1}-\dfrac{3d_2}{\mu_1\mu_2}$，所以若取 $M_0\leqslant 0$ 且满足 $\dfrac{d_1}{\mu_1}\leqslant M_0\leqslant\dfrac{d_1}{\mu_1}-\dfrac{3d_2}{\mu_1\mu_2}$ 时，则有 $M_3\leqslant 0$ 使 M_0，M_3 为线性不等式组的解，所以当 $N=3$ 时二次保凸插值样条存在．这时保凸区域 D 如图 1 阴影部分所示．



(a)当 $-\mu_2d_1+3d_2\leqslant 0$ 时　(b) 当 $-\mu_2d_1+3d_2>0$ 时

图 1 保凸区域 D

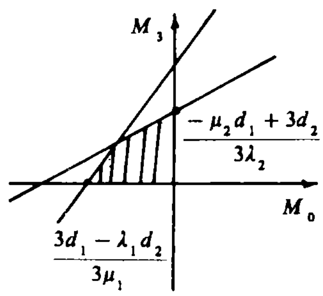


图 2 保凸区域 D

设型值点 P_0，P_1，P_2，P_3 其折线凸凹相间，且设 $d_1<0$，$d_2>0$，这时二次保凸插值样条的存在性要求是在型值点处的二阶导数满足下式：$M_0\leqslant 0$，$M_1<0$，$M_2>0$，$M_3\geqslant 0$，对于这种情况的保凸条件为：$M_0\leqslant 0$，$3d_1-\lambda_1d_2<3\mu_1M_0-\lambda_1\lambda_2M_3$，$\mu_2d_1+3d_2>-\mu_1\mu_2M_0+3\lambda_2M_3$，$M_3\geqslant 0$，保凸区域 D 如图 2 阴影部分所示．总结上面的讨论，得到：

定理 3　设 $P_0(x_0,y_0)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 为 4 个型值点，则通过此 4 点的二次保凸插值样条一定存在，且保凸区域 D 可由图解法确定．

设型值点为 $P_0\sim P_4$ 5 个点，其折线形状上凸，d_1，d_2，d_3 均为非正数，二次插值样条为保凸的充要条件为：$M_0\leqslant 0$，$a=(9-\lambda_2\mu_3)d_1-3\lambda_1d_2+\lambda_1\lambda_2d_3\leqslant\mu(9-\lambda_2\mu_3)M_0+\lambda_1\lambda_2\lambda_3M_4$，$b=-\mu_2d_1+3d_2-\lambda_2d_3\leqslant-\mu_2\mu_1M_0-\lambda_2\lambda_3M_4$，$c=\mu_2\mu_3d_1-3\mu_3d_2+(9-\lambda_1\mu_2)d_3\leqslant\mu_1\mu_2\mu_3M_0+\lambda_3(9-\lambda_1\mu_2M_4$，$M_4\leqslant 0$．显然当 $a>0$ 或 $c>0$ 时，上述线性不等式组无解．今用上述保凸条件讨论下面的例 1．

例 1　$P_0 \sim P_4$ 5 点值见表 1 所示．设 $y_2 = 1.7$，通过 $P_0 \sim P_4$ 的保凸二次插值样条存在．设 $y_2 = 1.8$，则通过 $P_0 \sim P_4$ 的保凸二次插值样条不存在．这例说明，若型值点的个数超个 4 个时就有可能发生二次保凸插值样条不存在．其原因是型值 $y_0 \sim y_4$ 之间的大小配合选得不合适所致．

表 1　通过 5 点的插值样条

型值点	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
x	0	1	2	3	4
y	0	1	1.7 (1.8)	1	0
d		−1.2 (−0.8)	−5.6 (−6.4)	−1.2 (−0.8)	

参考文献

1 苏步青，刘鼎元．计算几何．上海：上海科学技术出版社，1980．46

2 沪东造船厂，山东大学．剖面线法中的一些数学问题(1)．数学的实践与认识，1979，8(1)：32

3 Kuhn H W, Tucker A W．线性不等式与线性规划．上海：上海科学技术出版社，1964．75

4 森口繁一，宫下藤太郎．线性规划．上海：上海科学技术出版社，1963.50

On the Convexity−Preserving Quadratic Spline Interpolation

Sun Daoxun

(Department of Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou, 350002)

Abstvact　In this paper, we give the definition of convexity−preserving inter polation of a given function $f(x)$. A necessavy and sufficient conditiion is obtained for the quadratic spilne interpolation to be a convexity−preserving one . A method of convexity−preserving interpolation is presented.

Keywords　quadratic; convexity; interpolation