3 连通 3 正则权图圈权的一个猜想的证明

颜荔融
(数学系)

提 要 本文证实了 Bondy 的猜想. 证明了: 设 G 为简单 3 连通 3 正则权图, $|V(G)|=n>6$, 则 G 含圈 C, 使 $W(C)>4W(G)/n$.

关键词 权图; 连通度; 顶点的权度

0 引言

本文仅限于考虑简单图 G. $V(G)$、$E(G)$ 分别表示 G 的顶点集与边集. 若对任一 $e\in E(G)$, 定义一非负数 $W(e)$, 则称 G 为权图, $W(e)$ 为边 e 的权. 设 H 为 G 的子图, 定义 H 的权为 $W(H)=\sum_{e\in E(H)} W(e)$. 若 C(或 P)是 G 中权最大的圈(或路), 称 C(或 P)为最优圈(或路). $N_G(v)$、$d_G(v)$ 分别表示顶点 v 在 G 中的邻集与度数. 顶点 v 在 G 中的权度定义为 $W_G(v)=\sum_{u\in N_G(v)} W(uv)$. 在不致于引起混淆的情况下, $N_G(v)$、$d_G(v)$ 和 $W_G(v)$ 可分别写成 $N(v)$、$d(v)$ 和 $W(v)$.

Bondy 曾提出如下猜想[1]: 设 G 为简单 2 连通 3 正则权图, $|V(G)|=n\geqslant 6$, 则 G 含圈 C, 使 $W(C)\geqslant 4W(G)/n$. 并且证明了连通度为 2 时结论成立. 本文证明了连通度为 3 时结论也成立,从而证实了这个猜想.

1 主要结果

引理 1 对于 3 连通 3 正则权图 G, 若 $|V(G)|=6$, 则 G 含圈 C, 使 $W(C)\geqslant 4W(G)/6=2W(G)/3$.

证明 顶点数为 6 的 3 连通 3 正则不同构图只有图 1、图 2 两个:

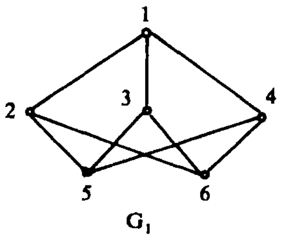

图 1 阶为 6 的二部 3−正则图

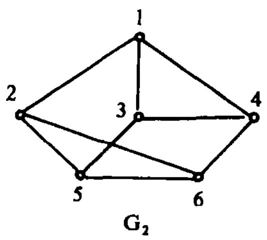

图 2 阶为 6 的非二部 3−正则图

本文1991年3月6日收到

图G_1有3个Hamilton圈覆盖每条边两次:

$$C_1^1=1253641 \qquad C_2^1=1264531 \qquad C_3^1=1452631$$

图G_2有3个Hamilton圈覆盖每条边两次:

$$C_1^2=1256431 \qquad C_2^2=1265341 \qquad C_3^2=1352641$$

故有 $\sum\limits_{i=1}^{3} W(C_i^j)=2W(G_j)$, $j=1$, 2. 取 C^j 为 C_i^j, $i=1$, 2, 3 中权最大者，有 $W(C^j)\geqslant 2W(G_j)/3$, $j=1$, 2. 所以，G含圈C使$W(C)\geqslant 2W(G)/3$.

引理 2 设 G 为 3 连通 3 正则权图．若存在 $x\in V(G)$, $N(x)=\{x_1, x_2, x_3\}$ 中任二顶点不相邻，且任一 $x_i\in N(x)$, x_i 的另二邻点 i_a, i_b 相邻，$i=1$, 2, 3. 则 G 含子图 H 如图 3，从而 $|V(G)|\geqslant 10$.

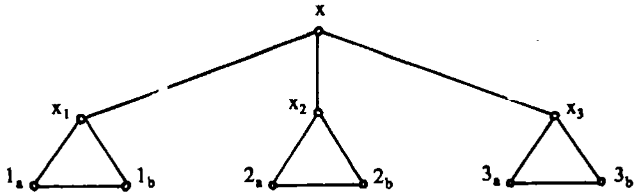

图 3 3–正则图一子图

为叙述方便，若 3 连通 3 正则图 G 含有形如图 3 的子图，我们称 G 具有结构 p，并记 $N^1(x_i)=\{i_a, i_b\}$, $i=1$, 2, 3. $N^2(x)=\bigcup\limits_{i=1}^{3} N^1(x_i)$.

证明 对任意 i_0, $j_0\in\{1, 2, 3\}$, $i_0\neq j_0$. 若 $N^1(x_{i_0})$ 与 $N^1(x_{j_0})$ 有一顶点相同，则该顶点的度必为 4，与 G 为 3 正则图矛盾．若 $N^1(x_{i_0})$ 与 $N^1(x_{j_0})$ 相同，则 $\{x\}$ 构成 G 的 1– 顶点割，与 G 为 3 连通图矛盾．从而，$\{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 3_a, 3_b\}$ 互不相同，即 G 有子图如图 3. 显然，$|V(G)|\geqslant 10$.

引理 3 若 3 连通 3 正则权图 G 具有结构 p，$|V(G)|>10$，则 ① $N^2(x)$ 中除 $i_a i_b \in E(G)$, $i=1$, 2, 3 外至多还有一对顶点相邻． ② 令 $V_1=\{x_1, x_2, x_3\}\bigcup N'(x_1)\bigcup N'(x_3)$, $V_2=V(G)\setminus V_1$，则 $G[V_2]$是连通的．

证明 (1) 若 $N^2(x)$ 中还有三对顶点相邻，则 $|V(G)|=10$，与 $|V(G)|>10$ 矛盾．若 $N^2(x)$ 中还有二对顶点相邻，记 $V_1=\{x, N(x), N^2(x)\}$，则 $G[V_1]$ 中除 2 个顶点的度为 2 外，其余顶点的度均为 3，同构意义下如图 4. 记 $V_2=V(G)\setminus V_1$，由 $|V(G)|>10$ 知 $V_2\neq\varphi$. 则若去掉 $G[V_1]$ 中度为 2 的那二个顶点，$G[V_1]$ 与 $G[V_2]$ 不连通，即 $G[V_1]$ 中度为 2 的那二个顶点构成 G 的 2– 顶点割，与 G 为 3 连通图矛盾，故结论成立．

(2) 令 $S=\{e|e=uv,\ u\in V_1,\ v\in V_2\}$，则 $|S|\leqslant 5$. 若 $G[V_2]$ 不连通，设 $V_2=V'_2\bigcup V''_2$，$G[V'_2]$ 与 $G[V''_2]$ 为 $G[V_2]$ 的两个互不相交的部分．令 $S'=\{e|e=uv,\ u\in V_1,\ v\in V'_2\}$，$S''=\{e|e=uv,\ u\in V_1,\ v\in V''_2\}$，显然，$S'\neq\varphi$，$S''\neq\varphi$，(否则，$G$ 不连通，矛盾)，且 $S=S'\bigcup S''$. 所以，S'、S'' 中至少有一个，其元素个数小于等于 2. 不妨设 $|S''|\leqslant 2$，则 S' 构成 G 的边割集且元素个数小于等于 2，与 G 为 3 连通图矛盾．

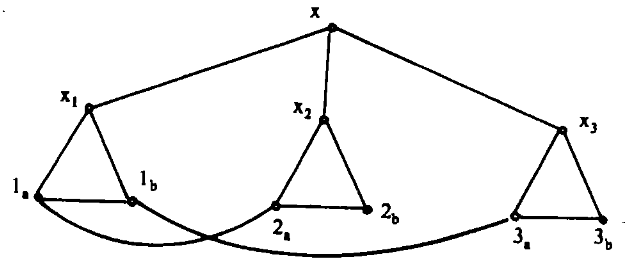

图 4　$N^2(x)$中有两对顶点相邻情形

引理 4　若 3 连通 3 正则权图 G 具有结构 p，且 $W(x)\leqslant 2W(G)/n$，任一 $v\in N(x)\bigcup N^2(x)$，有 $W(v)>2W(G)/n$，则 G 含圈 C 使 $W(C)\geqslant 4W(G)/n$.

证明　(1) 当 $|V(G)|=10$，此时，$N^2(x)$ 中除 $i_a i_b\in E(G)$，$i=1,\ 2,\ 3$ 外还有三对顶点相邻．那么，若 $N'(x_j)$ 中有一顶点与 $N'(x_{i+1})$ 相邻，则 $N'(x_i)$ 中另一顶点必与 $N'(x_{i+2})$ 相邻，其中 $i=1,\ 2,\ 3$，$i+j=\mathrm{mod}(3)$. 否则，G 有如图 5 结构，这是不可能的．故 G 有结构如图 6.

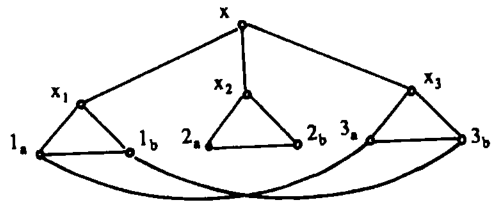

图 5　$N'(x_1)$与 $N'(x_3)$有两对顶点相邻情形

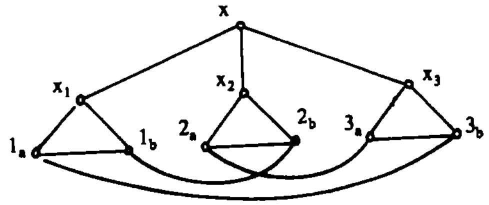

图 6　阶为 10 的 3−正则图

为不失一般性，可设 $W(xx_1)=\max\{W(xx_i)|i=1,\ 2,\ 3\}$，且 $W(x_1 1_a)\geqslant W(x_1 1_b)$. 设 1_b 的另一邻点属于 $N'(x_2)$，不妨设 $1_b 2_b\in E(G)$，则 2_a 的另一邻点属于 $N'(x_3)$，不妨设 $2_a 3_a\in E(G)$. 则取 $C=xx_1 1_a 1_b 2_b x_2 2_a 3_a x_3 x$，有 $W(C)\geqslant W(1_b)+W(x_2)>4W(G)/n$.

(2) 当 $|V(G)|>10$ 时，由引理 3 知 $N^2(x)$ 中除 $i_a i_b\in E(G)$，$i=1,\ 2,\ 3$ 外至多还有一对顶点相邻，不妨设这对顶点属于 $N'(x_1)\bigcup N'(x_2)$. 比较 $W(x_1 1_a)$ 与 $W(x_1 1_b)$，不妨

设 $W(x_1 1_a)\leqslant W(x_1 1_b)$，$1_a$ 的另一邻点设为 y．令 $P_1=x_1 1_b 1_a y$，有 $W(P_1)>W(1_a)>2W(G)/n$．比较 $W(x_3 3_a)$ 与 $W(x_3 3_b)$，不妨设 $W(x_3 3_a)\leqslant W(x_3 3_b)$，$3a$ 的另一邻点设为 z，令 $p_2=x_3 3_b 3_a z$，有 $W(p_2)\geqslant W(3_a)>2W(G)/n$．显然，$y\bar{\in}N'(x_3)$，$z\bar{\in}N^2(x)$．令 $P=yP_1x_1xx_3p_2z$，则 $W(p)\geqslant W(1_a)+W(3_a)>4W(G)/n$．若 $y=z$，取 $C=P$，有 $W(C)>4W(G)/n$．若 $y\neq z$，令 $G'=G-\{x,\ x_1,\ x_3\}-\{N'(x_1)\bigcup N'(x_3)\}$，由引理3知，$G'$ 连通，从而 G' 存在 $(y,\ z)$ 路 P^*，令 $C=P\bigcup P^*$，有 $W(C)>4W(G)/n$．

定理　设 G 为3连通3正则权图，$|V(G)|=n\geqslant 6$，则 G 含圈 C 使 $W(C)\geqslant 4W(G)/n$．

证明　对顶点数 n 用数学归纳法．$n=6$ 时，由引理1知结论成立．假设结论对顶点数小于 n 的3连通3正则权图 G' 成立．$n\geqslant 8$ 时，因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}W(v_i)=2W(G)$，所以存在 $x\in V(G)$ 使 $W(x)\leqslant 2W(G)/n$．记 $N(x)=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$，由 G 是3连通图知 $N(x)$ 中至多只有一对顶点相邻．

(1) $N(x)$ 中恰有一对顶点相邻，不妨设 $x_2x_3\in E(G)$．令 $G'=G-x+x_1x_3$，$W(x_1x_3)=0$，则 G' 是2连通图，$W(G')=W(G)-W(x)\geqslant \dfrac{n-2}{n}W(G)$．记顶点 x_2 的另一邻点为 x_4，则顶点 x_3，x_4 不相邻．否则，如图7，若 $x_3x_4\in E(G)$，则 $\{x,\ x_4\}$ 构成 G 的2一顶点割，与 G 是3连通图矛盾．因为 x_3，x_4 不相邻，令 $G''=G'-x_2+x_3x_4$，$W(x_3x_4)=W(x_2x_3)+W(x_2x_4)$，则 G'' 是2连通3正则权图且 $W(G'')=W(G')$，$|V(G'')|\geqslant 6$．① 若 G'' 的连通度为2，由参考文献[1]命题5.2知 G'' 含圈 C'' 使 $W(C'')\geqslant 4W(G'')/(n-2)\geqslant 4W(G)/n$．② 若 G'' 的连通度为3，由归纳假设知，G'' 含圈 C'' 使 $W(C'')\geqslant 4W(G'')/(n-2)\geqslant 4W(G)/n$．

若 $x_1x_3\in E(C'')$，取 $C=C''\bigcup\{xx_1,\ xx_3\}\setminus\{x_1x_3\}$；

若 $x_3x_4\in E(C'')$，取 $C=C''\bigcup\{x_2x_3,\ x_2x_4\}\setminus\{x_3x_4\}$；

若 x_1x_3，$x_3x_4\in E(C'')$，取 $C=C''\bigcup\{xx_1,\ xx_3,\ x_2x_3,\ x_2x_4\}\setminus\{x_1x_3,\ x_3x_4\}$；

若 x_1x_3，$x_3x_4\bar{\in}E(C'')$，取 $C=C''$，均有 $W(C)\geqslant W(C'')\geqslant 4W(G)/n$．

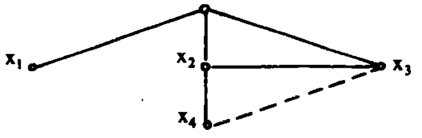

图7　$N(x)$恰有一对顶点相邻情形

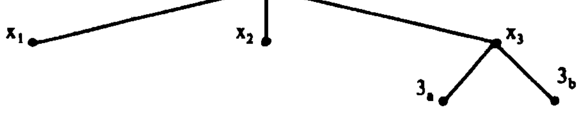

图8　顶点均不相邻情形

(2) $N(x)$ 中任二顶点不相邻，且存在 $x_i\in N(x)$ 使 x_i 的另二邻点 i_a、i_b 不相邻，不妨

设 $x_i = x_3$，如图 8. 令 $G'' = G - x + x_1x_2 - x_3 + 3_a3_b$，$W(x_1x_2) = 0$，$W(3_a3_b) = W(x_33_a) + W(x_33_b)$，则 G'' 是 2 连通 3 正则图，$|V(G'')| \geqslant b$，$W(G'') = W(G) - W(x) \geqslant (n-2)W(G)/n$. 类似于 (1) 知 G 含圈 C 使 $W(C) \geqslant 4W(G)/n$.

(3) $N(x)$ 中任二顶点不相邻，且任一 $x_i \in N(x)$，x_i 的另二邻点 i_a、i_b 相邻，即 G 具有结构 p. 若存在一顶点 $s \in N(x) \bigcup N^2(x)$，$W(s) \leqslant 2W(G)/n$，由于 s 的邻集恰有一对顶点相邻，把 s 看成 (1) 中的 x，由 (1) 知 G 含圈 C 使 $W(C) \bigcap 4W(G)/n$. 故可设任一 $v \in N(x) \bigcup N^2(x)$，$W(v) > 2W(G)/n$. 由引理 4 知 G 含圈 C 使 $W(C) \geqslant 4W(G)/n$. 证毕.

参考文献

1 Bondy J A. Small cycle double covers of graphs (to appear).

2 Bondy J A. Optimal paths and cydles in weighted graph. Annals of Discrete Mathematics, 1989 (41): 53 ~70

3 帮迪，默蒂. 图论及其应用. 北京: 科学出版社，1984

Proof of Conjecture about the Weight of Cycle in 3-Connected 3-Regular Weighted Graph

Yan Lirong

(Department of Mathematics)

Abstract Bondy proposed a conjecture as follows: Let G be a simple 2-connected 3-regular weighted graph on n vertices where $n > 6$. Then G would contain a cycle of weight at least $4W(G)/n$. If the connectivity of G equals to two, the conjecture would be true. This paper further proves that if the connectivity of G equals to three, the conjecture is also true.

Keywords weighted graph; connectivity; weighted degree of a vertex