第20卷 第3期　　福州大学学报(自然科学版)　　Vol.20 No.3
1992年 9月　　Journal of Fuzhou University (Natural Science)　　Sep. 1992

框架一剪力墙刚接体系在任意水平力作用下的三次B样条加权残值法

叶荣华
(土建系)

提　要　对框架一剪力墙房屋结构在任意水平力作用下进行分析时，本文不采用连续栅片的假定，而以 B_3 样条函数结合加权残值法求解，力学模型较符合实际，文中推导出求解的一整套递推公式，并以实例计算，方法简明易算.

关键词　任意水平力；B_3 样条函数；加权残值法

0 前言

对多高层的框架一剪力墙房屋在任意水平力作用下进行分析时，以惯用的连续栅片的假定，其力学模型与边界条件同实际情况有所出入，尤其在多层情况下相差较大，因而近似程度较差. 本文摒弃连续化的假定，而应用 B_3 样条函数结合加权残值法直接求解在各楼层处剪力墙与框架间相互作用的有限个集中力与连系梁施予的有限个约束力矩，其力学模型与边界条件同实际情况比较符合，对任意水平力的处理又很方便，既避免了大量的解联立方程的冗繁工作，又使计算大为简便.

1 计算简图

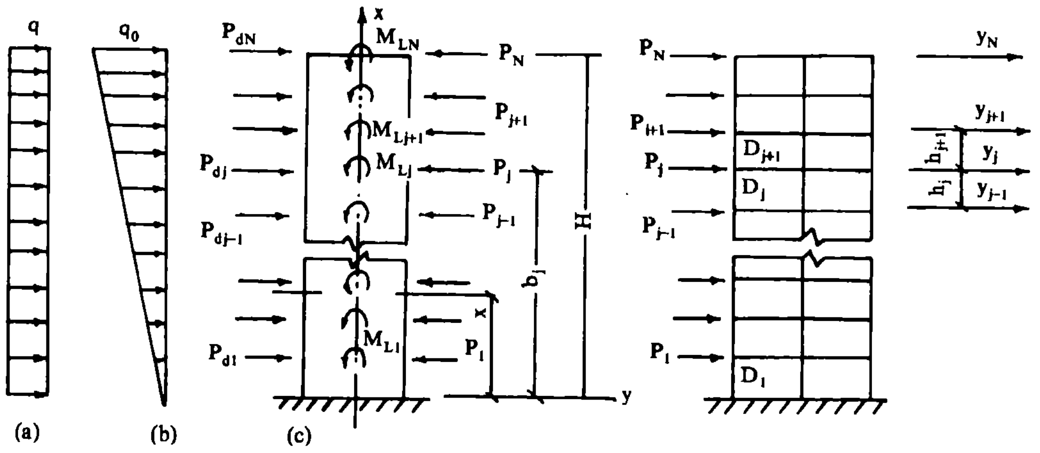


图1　计算简图

本文1991年10月9日收到

1.1 基本假定 [1]

(1) 楼盖在自身平面内刚度视为无限大.

(2) 房屋的质量中心与刚度中心相一致，不考虑房屋扭转变形影响.

(3) 所有连系梁的刚度较大，两端的转角都相同. 忽略连系梁的轴向变形.

(4) 在房高 $H<50$m，宽高比 $b/H>1/4$ 情况下，可不计框架柱与剪力墙的轴向变形影响.当需考虑轴向变形时，可近似地以框架的"等效剪切刚度"替代剪切刚度即可.

(5) 剪力墙是实体的，或属整截面剪力墙，或可分解为各肢剪力墙，且考虑剪力墙的剪切变形.

1.2 计算简图

在抗震缝区段内综合剪力墙除承受各种水平荷载外，尚有连系梁施予的约束弯矩$\{M_L\}$和综合框架的反作用力$\{P\}$. 如图 1.

2 内力、位移及基本方程

2.1 内力、位移表达式

(1) 连系梁. 根据假定(3)，第j层S根连系梁的总约束弯矩为:

$$M_{L_j}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{6EI_{L_{ij}}}{L_{ij}}d_{ijL}+\frac{6EI_{L_{ij}}}{L_{ij}}d_{ijr}\right)\theta_j \qquad \text{或} \qquad M_{L_j}=K_{L_j}\theta_j$$

在仅考虑剪力墙弯曲与剪切变形时，转角为

$$\theta=y'_M=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{有} \quad M_{L_j}=K_{L_j}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_j \tag{1}$$

式中：d_{ijL}，d_{ijr} 是第 i 根梁左、右端刚度修正系数．K_{L_j} 是第 j层总连系梁的刚度系数．

(2) 框架. 根据假定(5)框架侧移即由剪切变形引起的　$y=y_\theta$ (2)

(3) 剪力墙. 当同时考虑弯曲和剪切变形时侧移为　$y=y_M+y_q$ (3)

2.2 内力与荷载关系

(1) 框架　$P_j=D_j(y_j-y_{j-1})-D_{j+1}(y_{j+1}-y_j)$ (4)

(2) 剪力墙. 在图1(a)、(b)、(c)荷载共同作用下:

$$Q_W=\sum_{j=1}^{N}(P_{d_j}-P_j)(b_j-x)_+^0+q(H-x)+\frac{q_0}{2H}(H^2-x^2) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}M_W=&-\sum_{j=1}^{N}(P_{d_j}-P_j)(b_j-x)_+ +\sum_{j=1}^{N}M_{L_j}(b_j-x)_x^0-\frac{q}{2}(H-x)^2\\&-\frac{q_0}{2}(H-x)^2\frac{1}{3H}(2H+x)\end{aligned} \tag{6}$$

2.3 基本方程

由式(3)有 $y'=y'_M+\dfrac{\mu Q_W}{GA_W}$，得: $SEI_Wy''=-M_W-\beta^2q_p$

式中：$S=1+\dfrac{\mu Dh}{GA_W}$； $\beta^2=\dfrac{\mu EI_W}{GA_W}$. 其中，$D$ 是同层框架柱 D 值；μ 是剪应力分布不均

匀系数. 将式(4)、(6)代入得基本方程如下:

$$SEI_W y'' + \sum_{j=1}^{N}[-D_{j+1}(y_{j+1}-y_j)+D_j(y_j-y_{j-1})](b_j-x)_+ + \sum_{j=1}^{N}K_{L_j}(b_j-x)^{\cdot}_+ \cdot y'_j$$
$$= F(p) \tag{7}$$

$$F(p)=\begin{cases}\frac{q}{2}(H-x)^2-\beta^2 q & \text{均布荷载}\\ \frac{q_0}{2}(H-x)^2\frac{1}{3H}(2H+x)-\beta^2\frac{x}{H}\cdot q_0 & \text{倒三角形荷载}\\ \sum_{j=1}^{N}P_{d_j}(b_j-x)_+ & \text{水平集中力}\end{cases}$$

边界条件: 当$x=0$时, $y_0=0$; $\theta_0=\frac{\mu}{S_1G_1A_{\omega_1}}(Q_p)_0$

当$x=H$时, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_H=-\frac{K_{LN}}{S_NE_NI_{\omega_N}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_H-\frac{\mu}{S_NG_NA_{\omega_N}}(q_p)_H$

其中: $(Q_p)_0=\begin{cases}qH & \text{均布荷载}\\ \frac{1}{2}q_0H & \text{倒三角形荷载}\\ \sum_{j=1}^{N}P_{d_j} & \text{水平集中力}\end{cases}$ $\qquad (q_p)_H=\begin{cases}q & \text{均布荷载}\\ q_0 & \text{倒三角形荷载}\\ 0 & \text{顶部集中力}\end{cases}$

3 基本方程的B_3样条加权残值法

3.1 残值方程

取B_3样条函数为试函数: $\tilde{y}(x)=\sum_{j=-1}^{N+1}A_j\Omega_3\left(\frac{x-x_j}{\Delta x}\right)$, 以样条节点$j$为配点$i$有:

$$\tilde{y}(x_i)=\sum_{j=-1}^{N+1}A_j\Omega_3(i-j), \qquad \tilde{y}'(x_i)=\frac{1}{\Delta x}\sum_{j=-1}^{N+1}A_j\Omega'_3(i-j)$$

余类推. 其中: Δx为等节点步长, 当层高相等时即为层高h. 今研究等层高情况, 非等层高情况在另文讨论. 将之代入控制方程得在各配点处的残值方程为:

$$\begin{aligned}R_i = {} & S_iE_iI_i[A_{i-1}-2A_i+A_{i+1}]\\ & + h^2\sum_{k=i+1}^{N}[D_{k+1}\left(\frac{1}{6}A_{k-1}+\frac{1}{2}A_k-\frac{1}{2}A_{k+1}-\frac{1}{6}A_{k+2}\right)\\ & - D_k\left(\frac{1}{6}A_{k-2}+\frac{1}{2}A_{k-1}-\frac{1}{2}A_k-\frac{1}{6}A_{k+1}\right)]\cdot(k-i)h\\ & + h\sum_{k=i}^{N}K_{LK}\left(-\frac{1}{2}A_{k-1}+\frac{1}{2}A_{k+1}\right)-h^2F_i(p)=0\end{aligned} \tag{8}$$

其中: $$F_i(p)=\begin{cases}\dfrac{q}{2}(H-x_i)^2-\beta_i^2\cdot q & \text{均布荷载}\\ \dfrac{q_0}{2}(H-x_i)^2\dfrac{(2H+x_i)}{3H}-\beta_i^2\dfrac{x_i}{H}q_0 & \text{倒三角形荷载}\\ \sum\limits_{k=i+1}^{N}P_{dk}(k-i)h & \text{水平集中力}\end{cases}$$

边界条件: $\frac{1}{6}A_{-1}+\frac{2}{3}A_0+\frac{1}{6}A_1=0$, $\quad(-\frac{1}{2}A_{-1}+\frac{1}{2}A_1)=\frac{\mu h}{S_1G_1A_{\omega_1}}(Q_p)_0$

$$(A_{n-1}-2A_N+A_{N+1})=-\frac{hK_{LN}}{S_NE_NI_N}(-\frac{1}{2}A_{N-1}+\frac{1}{2}A_{N+1})-\frac{\beta_N^2h^2}{S_NE_NI_N}(q_p)_H$$

3.2 确定参数公式

利用各配点的残值方程与边界条件进行简化整理后得:

$$A_{N-1}=\frac{4}{(2-\mu_{N,N})}A_N-\frac{(2+\mu_{N,N})}{(2-\mu_{N,N})}A_{N+1}-\frac{2\beta_N^2h^2}{(2-\mu_{N,N})S_NE_NI_N}(q_p)_H \tag{9}$$

$$\begin{aligned}A_{i-1}=&\frac{(12-\lambda_{i+2,i}+3\lambda_{i+1,i})}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}A_i-\frac{3(2+\lambda_{i+2,i}+\lambda_{i+1,i}+\mu_{i,i})}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}A_{i+1}\\&+\frac{(3\lambda_{i+2,i}-\lambda_{i+1,i})}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}A_{i+2}+\frac{\lambda_{i+2,i}}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}A_{i+3}\\&-\frac{6}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}\sum_{k=i+2}^{N}[\lambda_{k+1,i}(\frac{1}{6}A_{k-1}+\frac{1}{2}A_k-\frac{1}{2}A_{k+1}-\frac{1}{6}A_{k+2})\\&-\lambda_{k,i}(\frac{1}{6}A_{k-2}+\frac{1}{2}A_{k-1}-\frac{1}{2}A_k-\frac{1}{6}A_{k+1})](k-i)\\&-\frac{6}{(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}\sum_{k=i+1}^{N}\mu_{k,i}(-\frac{1}{2}A_{k-1}+\frac{1}{2}A_{k+1})\\&+\frac{6h^2}{S_iE_iI_i(6-\lambda_{i+1,i}-3\mu_{i,i})}F_i(p)\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)\end{aligned} \tag{10}$$

$$A_0=-\frac{1}{2}A_1+\frac{h\cdot\beta_1^2}{2S_1E_1I_{\omega_1}}\cdot(Q_p)_0 \tag{11}$$

$$A_{-1}=A_1-2h\frac{\beta_1^2}{S_1E_1I_{\omega_1}}\cdot(Q_p)_0 \tag{12}$$

其中: N是楼层数, $S_iE_iI_i$是配点i处值. 且

$$S_iE_iI_i=(S_iE_iI_{w_i}\cdot h_i+S_{i+1}E_{i+1}I_{W_{i+1}}\cdot h_{i+1})/(h_i+h_{i+1})$$

$$\lambda_{i,j}=\frac{h^3D_i}{S_jE_jI_j};\qquad\mu_{i,j}=\frac{h\cdot K_{L_i}}{S_jE_jI_j}$$

3.3 确定位移与内力

(1) 楼层侧移值　$y_j=\frac{1}{6}(A_{j-1}+4A_j+A_{j+1})$

(2) 楼层处框架与剪力墙间的作用力

$$p_j=D_{j+1}\left(\frac{1}{6}A_{j-1}+\frac{1}{2}A_j-\frac{1}{2}A_{j+1}-\frac{1}{6}A_{j+2}\right)-D_j\left(\frac{1}{6}A_{j-2}+\frac{1}{2}A_{j-1}-\frac{1}{2}A_j-\frac{1}{6}A_{j+1}\right)$$

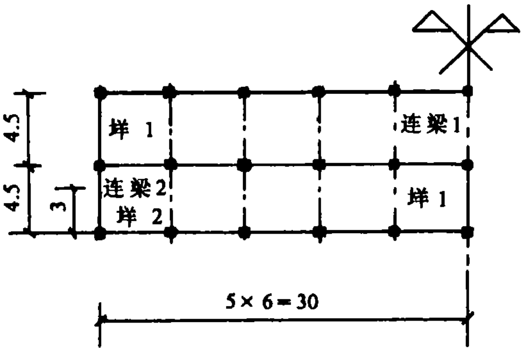
(3) 楼层处总连系梁的约束弯矩值　$M_{L_j}=\frac{K_{L_j}}{h}\left(-\frac{1}{2}A_{j-1}+\frac{1}{2}A_{j+1}\right).$

以上各式中 $j=1，2，\cdots，N$

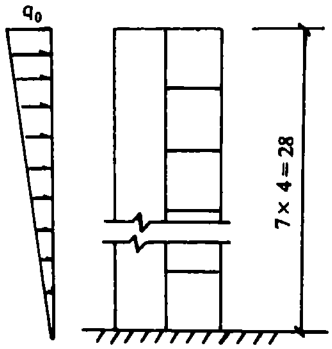
最后用一般结构力学方法可确定剪力墙与框架的内力及顶部位移与层间位移.

4 计算实例 [1]

某七层房屋的结构平面及剖面如图 2 所示，已知等效三角形地震荷载 $q_0=120\text{kN}/\text{m}$. 不计高振型影响，作框架一剪力墙的协同工作计算.



(a) 平面简图(单位：m)



(b) 剖面简图(单位：m)

图 2　结构平面与剖面简图

4.1 资料

(1) 各层框架的侧移刚度

$D_1=200508.77(\text{kN}/\text{m})$，$D_2\sim D_3=120417.44(\text{kN}/\text{m})$，

$D_4\sim D_7=1116165.62(\text{kN}/\text{m})$

(2) 各层剪力墙的抗弯刚度与剪切刚度

$E_1I_{\omega_1}\sim E_3I_{\omega_3}=198.47685\times10^6(\text{kN}-\text{m}^2)$

$E_4I_{\omega_4}\sim E_7I_{\omega_7}=180.4335\times10^6(\text{kN}-\text{m}^2)$

$G_1A_{\omega_1}/\mu_1\sim G_3A_{\omega_3}/\mu_3=21.1068\times10^6(\text{kN})$

$G_4 A_{\omega_4} / \mu_4 \sim G_7 A_{\omega_7} / \mu_7 = 19.188 \times 10^6 (\mathrm{kN})$

(3) 各层连系梁的刚度系数. 因各层情况相同, 有: $K_{L_1} \sim K_{L_7} = 4926494 (\mathrm{kN-m})$

4.2 计算参数 A_j 值

由文中公式得:

$$A_6 = 2.21126377A_7 - 1.1126377A_8 - 1.031988 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_5 = 3.5181403A_7 - 2.5181402A_8 - 2.3251374 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_4 = 5.2891496A_7 - 4.2891452A_8 - 1.4713037 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_3 = 7.8866638A_7 - 6.8866542A_8 + 5.4357187 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_2 = 11.699711A_7 - 10.699695A_8 + 23.988394 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_1 = 17.27783A_7 - 16.277805A_8 + 61.896936 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_0 = 25.487957A_7 - 24.487919A_8 + 130.79948 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

$$A_{-1} = 36.827397A_7 - 35.827341A_8 + 240.16818 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

另: $A_0 = -8.638915A_7 + 8.1389025A_8 - 29.41484 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

$$A_{-1} = 17.27783A_7 - 16.277805A_8 + 55.762424 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$$

得: $A_8 = 107.79713 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$　　$A_3 = 38.839733 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

$A_7 = 98.364225 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$　　$A_2 = 21.424986 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

$A_6 = 86.836831 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$　　$A_1 = 6.716632 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

$A_5 = 72.28572 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$　　$A_0 = -1.8247707 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

$A_4 = 56.434255 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$　　$A_{-1} = 0.5820093 \times 10^{-4} (\mathrm{m})$

4.3 内力与顶点位移值

为比较起见将用 B_5 样条函数为试函数计算的结果, 与用连续化假定计算的结果, 以及用有限元法计算的结果分别列入表 1、表 2 中.

表 1　框架与剪力墙间作用力$\{P\}$ (单位: kN)

P_j	本文方法	B_5样条函数法	连续化假定法	有限元法
P_7	135.70776	124.67478	171.30594	141.1281818
P_6	29.9895	36.37681	21.115689	32.557273
P_5	19.29935	29.94778	27.560844	18.1281818
P_4	15.66843	12.25628	21.318482	1.41636364
P_3	3.96804	2.207418	2.549162	−4.6327273
P_2	−34.46407	−34.688644	−23.731712	−38.877273
P_1	−14.88441	−14.904196	−61.657846	−35.829091

表2 连系梁约束弯矩$\{M_L\}$ (单位: kN−m)

M_{L_i}	本文方法	B_5样条函数法	连续化假定法	有限元法
M_{L_7}	1290.7598	1174.8777	1672.28673	778.766667
M_{L_6}	1605.945	1500.8396	1768.68392	1272.13333
M_{L_5}	1872.2264	1897.4559	1944.88105	1789.900
M_{L_4}	2059.6432	2118.4619	2077.02232	2230.400
M_{L_3}	2155.9119	2165.665	2042.81895	2642.800
M_{L_2}	1978.1783	1985.1414	1768.9449	2630.800
M_{L_1}	1431.7473	1437.9519	1141.71849	2058.1333

顶点位移值: 本文方法为 0.980cm. B_5 样条函数法为 0.976cm. 连续化假定法为 1.096cm. 很接近.

参考文献

1 同济大学, 多层及高层房屋结构设计(下册). 上海: 上海科学技术出版社, 1982

A Method of Weighted Residuals with B_3—Spline Functions for Analyzing the Rigid—Joint System of Frame with Shear Walls Subjected to Various Horizontal Loads

Ye Ronghua

(Department of Civil and Architectural Engineering)

Abstract During analyzing the frame with shear walls subjected to various horizontal loads, we don't use the habitual hypothesis of continuous paling at present, and use the method of weighted residuals with B_3-spline functions in this paper, its mechanical model tally with the actual situation, the formulas provided in paper are simple and easy calculation. Finally, we indicate that method in this paper are desirable by analyses of example and compared with other methods.

Keywords various horizontal aoads; B_3-spline function; method of weighted residuals