

含压剪裂缝的有限域多裂隙体解

池 元 刘光廷
(土建系) (清华大学)

提 要 从边界虚拟力法出发, 用缝面受集中荷载的解析解来构造裂缝单元, 模拟压剪缝面复杂的剪力分布, 直接解出各种复杂工程边界条件下拉压剪共存的多裂隙体问题. 算例表明, 这种解析数值解精度高、机时省, 利于复杂条件多裂隙工程研究.

关键词 裂缝; 强度因子; 压剪

0 前言

水利砼工程中常遇到处在剪切状态下的裂缝, 如碾压砼坝层间缝. 这些缝可分拉剪(上游坝踵应力集中区附近)和压剪(上下游大部分水平缝)两大类. 拉剪裂缝缝面张开, 缝面边界条件较简单, 一般作缝面不受剪力处理^[1,2]. 对于压剪缝, 由于裂缝面部分或全部区域产生压缝现象, 且压力强度是随缝面变化的. 在缝面上下缘接触部位能承受部分剪力. 如果不考虑这部分剪力, 那就相当于将它们移向缝端使缝端剪切强度因子 K_{II} 数值偏大. 通常解决的办法是根据缝面法向接触应力确定的缝面各点能承受的最大剪力来代替真实的剪力值:

$$|\sigma_s(t)| = |\sigma_{s,max}(t)| = |\sigma_n(t)| \tan \varphi + c \tag{1}$$

式中: $\sigma_n(t)$ 为缝面 t 点法向压面力; φ 为材料内摩擦角; c 为材料的凝聚力; $\sigma_{s,max}(t)$ 为 t 点滑动破坏前能承受的最大剪力. 这种处理方法与缝面实际状态常不相符, 因滑动破坏前 t 点的剪切力可能小于 $\sigma_{s,max}(t)$, 即

$$|\sigma_s(t)| \leq |\sigma_{s,max}(t)| \tag{2}$$

对单一裂缝问题过大地采用缝面剪力值显然使缝端 K_{II} 数值下降. 对多裂问题, 由于裂缝间的相互干涉, 上述方法不但影响被近似处理裂缝的缝端剪力, 还影响其它裂缝的工作状态甚至产生错误的结果. 本文在文献[1、2]处理纯拉或拉剪缝多裂问题的基础上进一步研究压剪缝面和缝端的应力分担问题, 使缝面剪力满足条件(2), 得到更接近实际的结果. 计算结果还表明, 对存在压剪缝的结构, 应力和位移情况与加载过程存在密切的关系.

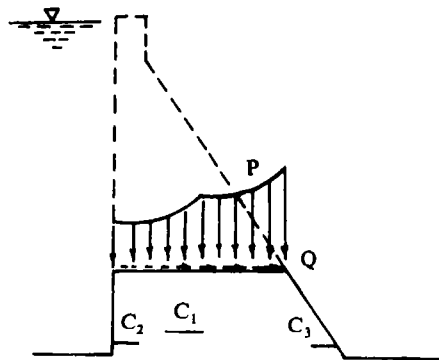


图1 坝内不同工作状态的水平缝

1 边界虚拟力结合裂缝单元解多裂问题

本文1991年9月16日收到

图 1 为砼重力坝断面，基础附近存在多条裂缝。\$C_1\$ 为内部裂缝，\$C_2\$、\$C_3\$ 为边界裂缝。在自重和水压的作用下，\$C_1\$ 和 \$C_3\$ 处于压剪状态，\$C_2\$ 由于缝内水压的作用，可能为拉剪、压剪或拉压剪结合。假定加载前裂缝开度为零或已知实测值。由边界虚拟力法可以得到坝体任意点的应力和位移与沿边界变化的未知边界虚拟力 \$P_n^j\$、\$P_s^j\$ 的函数关系^[1]。通过单裂缝缝面受集中荷载的解析解得到坝体任意点的应力和位移与各缝内沿缝面变化的未知缝面虚拟力 \$F_n^h\$、\$F_s^h\$ 的函数关系。内部裂缝问题见文 [1]，边界裂缝问题参见文 [2]。

利用叠加原理可得到未知边界虚拟力和未知缝面虚拟力共同作用下的应力场和位移场。将边界 \$i\$ 虚拟力单元中点的应力和位移转换成该单元局部坐标下的切向和法向面力及位移 \$(\sigma_s^i, \sigma_n^i\$ 及 \$u_s^i, u_n^i)\$，将裂缝面上第 \$h\$ 高斯积分点的应力也表示为关于裂缝面局部坐标系下的切向和法向面力 \$(\sigma_s^h\$ 和 \$\sigma_n^h)\$，叠加可用以下式子表示：

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L C_{ss}^{ikh} F_s^{hk} - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L C_{sn}^{ikh} F_n^{hk} \tag{3}$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L C_{ns}^{ikh} F_s^{hk} - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L C_{nn}^{ikh} F_n^{hk} \tag{4}$$

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} P_n^j - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L D_{ss}^{ikh} F_s^{hk} - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L D_{sn}^{ikh} F_n^{hk} \tag{5}$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} P_n^j - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L D_{ns}^{ikh} F_s^{hk} - \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^L D_{nn}^{ikh} F_n^{hk} \tag{6}$$

$$\sigma_s^{hm} = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{hmj} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{hmj} P_n^j - F_s^{hm} - \sum_{k \neq m}^M \sum_{h=1}^L C_{ss}^{khk} F_s^{hk} - \sum_{k \neq m}^M \sum_{h=1}^L C_{sn}^{khk} F_n^{hk} \tag{7}$$

$$\sigma_n^{hm} = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{hmj} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{hmj} P_n^j - F_n^{hm} - \sum_{k \neq m}^M \sum_{h=1}^L C_{ns}^{khk} F_s^{hk} - \sum_{k \neq m}^M \sum_{h=1}^L C_{nn}^{khk} F_n^{hk} \tag{8}$$

式中：\$P_s^j\$ 及 \$P_n^j\$ 为 \$j\$ 单元切向和法向边界虚拟力；\$F_s^h\$ 及 \$F_n^h\$ 为裂缝缝面 \$h\$ 高斯积分点切向和法向缝面虚拟力；\$A\$ 和 \$C\$ 为应力影响系数；\$B\$ 和 \$D\$ 为位移影响系数；\$M\$ 为裂缝总数；\$m\$ 为求高斯点面力的裂缝序号；上标 \$h_k\$ 或 \$h_m\$ 分别为 \$k\$ 号或 \$m\$ 号裂缝上的第 \$h\$ 高斯点。

拉剪缝的缝面条件为 \$\sigma_s^{hm} = \sigma_n^{hm} = 0\$，将边界条件代入 (3)~(8) 式可直接求解边界和缝面虚拟力。进而得到问题的解^[1, 2]。但对于压剪缝，缝面条件 \$\sigma_s^{hm} \neq 0\$，\$\sigma_n^{hm} \neq 0\$，需另作处理。

2 压剪处理

对纯压或压剪问题，(7)、(8)式左端表示缝面受力情况。缝面能承受的剪切面力应满足：

$$\sigma_n^{hm} \leq 0 \tag{9}$$

$$|\sigma_s^{hm}| \leq -\sigma_n^{hm} \cdot \text{tg}\varphi + c \tag{10}$$

裂缝缝面任意点的法向相对位移主要是由该点法向虚拟力决定的，对 \$h\$ 点有：

$$F_n^h > 0 \quad \text{张开} \quad (11)$$

$$F_n^h = 0 \quad \text{闭合} \quad (12)$$

$$F_n^h < 0 \quad \text{相互嵌入} \quad (13)$$

(13)式发生嵌入与实际不符, 说明负值缝面虚拟力 $F_n^h < 0$, 有一部分必须作为缝面上下缘法向接触力保留在缝面上, 这样才能保证 h 点上下缘压紧, 并不产生法向相互嵌入。

缝面存在法向接触应力, 就能确定该点承受剪力的上限(10)式。若将上限记为 σ_{smax}^h , 当某位置 $|F_s^h| < \sigma_{smax}^h$ 时, 这部分切向虚拟力缝面有能力承担。当 $|F_s^h| > \sigma_{smax}^h$ 时, 切向虚拟力超过该点能承受的最大剪力, 该点处于剪切破坏状态, 这时承受的剪力为 σ_{smax}^h , 其余部分仍作为虚拟力, 用公式表示为:

$$\text{当 } F_n^h \leq 0 \text{ 时, } \sigma_n^h = K \cdot F_n^h \quad (14)$$

$$\sigma_s^h = \begin{cases} K \cdot F_s^h & |F_s^h| \leq \sigma_{smax}^h \\ \sigma_{smax}^h \cdot \text{sign}(F_s^h) & |F_s^h| > \sigma_{smax}^h \end{cases} \quad (15)$$

$$\sigma_{smax}^h = |\sigma_n^h| \cdot \text{tg}\varphi + c$$

式中: K 为迭代系数, 一般取 $K = 0.3 \sim 0.8$, 目的在于控制迭代防止发散, $\text{sign}(x)$ 为符号函数:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

利用迭代方法确定缝面接触应力。首先假定缝面不接触, 以 $\sigma_n^h = 0$, $\sigma_s^h = 0$ 代入求虚拟力方程组中(7)、(8)式, 求得 F_n^h 和 F_s^h 。逐点用(11)~(13)式判别工作状态, 用(14)、(15)修正接触应力, 以修正后的接触应力作为第二轮迭代的裂缝面边界条件。反复迭代直至负值法向虚拟力的绝对值足够小, 满足误差要求为止。

迭代结束时的缝面接触应力便是缝面真实应力, 由相应的边界虚拟力和缝面虚拟力确定的应力场和位移场便是相应的解。

3 应力强度因子计算

经迭代可解得缝面任意点 t 的缝面虚拟力强度 $F_n(t)$ 和 $F_s(t)$ 。

内部裂缝内 s 受集中荷载 P, Q 时(如图2), 缝端应力强度因子可由下式求得:

$$K_I^{\pm a} - iK_{II}^{\pm a} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a \pm s}{a \mp s}} (P - iQ)$$

在缝面虚拟力作用下, 缝端应力强度因子可表示为:

$$K_I^{\pm a} - iK_{II}^{\pm a} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a \pm s}{a \mp s}} [F_n(t) - iF_s(t)] dt \quad (16)$$

(16)式数值计算参见文[1]。

边界裂缝内 - S 点受集中荷载如图3, 缝端应力强度因子由下式求得:

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{S}} (P - iQ)$$

在缝面虚拟力作用下, 缝端应力强度因子表示为:

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-b}^0 \frac{1}{\sqrt{t}} [F_n(t) - iF_s(t)] dt \quad (17)$$

式中积分区 $[-b, 0]$ 为虚拟力加载区^[2].

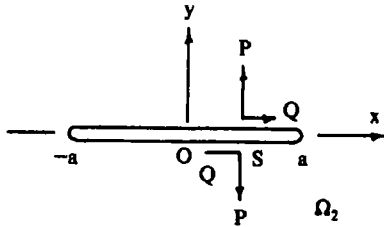


图2 无限域内部裂缝

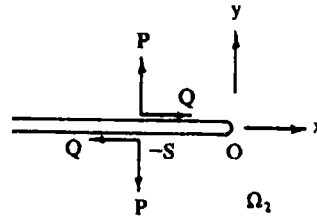


图3 无限域半无限裂缝

4 算例

如图4正方形板, 边长为15cm, 上下边作用 $P=1\text{GPa}$ 均布压力, 四边作用 $Q=400\text{MPa}$ 均布剪力. 两裂缝长度均为6.0cm. 按 P 和 Q 的加载先后, 分先压后剪和先剪后压两工况. 对先压后剪分别假设缝面 $f=0.5$, $c=0.0$ 和 $f=0.3$, $c=0.0$ 两情况. 对先剪后压取 $f=0.0$, $c=0.0$ 让缝面不承受剪力, 此外还计算假设缝的开度很宽, 加压 $P=1\text{GPa}$ 后缝面仍不接触的不传压也不传剪情况. 7个高斯点分布在裂缝缝面上.

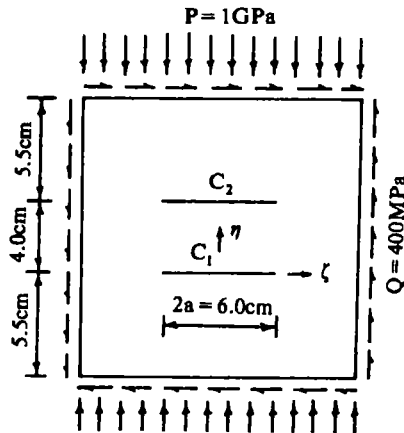


图4 压剪状态下双内部裂缝

表1可见 $f=0.5$, $c=0.0$ 工况的迭代结果缝面法向虚拟力和切向虚拟力均近似为零. 即裂缝两端 K_I , K_{II} 均近似为零. K_I 为零是因为假定加载前裂缝开度为零, 加载后裂缝上下缘无相对法向位移. K_{II} 为零说明 $f=0.5$ 已足够承担缝内各点的剪应力, 传力接近无损状态.

表1 先压后剪缝面力 ($f=0.5, c=0.0$) (单位: kN/cm^2)

缝面高斯点坐标(ζ)		-2.85	-2.22	-1.22	0.0	1.22	2.22	2.85
初值	法向虚拟力	-124.55	-118.71	-106.52	-94.18	-90.32	-96.04	-102.52
	切向虚拟力	68.18	70.24	66.96	53.87	35.73	22.57	18.10
迭代 终值	法向虚拟力	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
	切向虚拟力	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	法向接触力	-100.02	-100.43	-100.81	-100.90	-100.59	-99.97	-99.36
	切向接触力	39.19	38.98	38.76	38.61	38.49	38.36	38.24

表2 先压后剪缝面力($f=0.5, c=0.0$) (单位: kN/cm^2)

缝面高斯点坐标(ζ)		-2.85	-2.22	-1.22	0.0	1.22	2.22	2.85
迭代 终值	法向虚拟力	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
	切向虚拟力	9.62	9.92	10.68	11.38	11.33	10.65	10.07
	法向接触力	-102.01	-102.46	-102.22	-100.89	-99.16	-97.94	-97.39
	切向接触力	30.60	30.74	30.67	30.27	29.75	29.38	29.22

当 $f=0.3, c=0.0$ 时, 缝面虚拟力初值见表1, 迭代终值见表2. 由表2求得裂缝两端 K_I 约为零. 左端 ($-a$), $K_{II} = 3.16\text{kN}/\text{cm}^{3/2}$, 右端 ($+a$), $K_{II} = 3.27\text{kN}/\text{cm}^{3/2}$. 说明 $f=0.3$ 未能抵抗缝面剪力. 缝面各点剪力重分配. 表中各高斯点的剪力与法向力比值均为 $f=0.3$, 达到极限, 剩余剪力由缝端承当.

表3 先剪后压缝面力($f=0.5, c=0.0$) (单位: kN/cm^2)

缝面高斯点坐标(ζ)		-2.85	-2.22	-1.22	0.0	1.22	2.22	2.85
迭代 终值	法向虚拟力	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
	切向虚拟力	43.91	46.65	50.64	52.57	50.43	46.09	43.01
	法向接触力	-109.24	-109.84	-107.44	-100.96	-94.05	-90.57	-90.12
	切向接触力	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

对先剪后压取 $c=0.0, f=0.0$. 结果见表3. 由表3求得 C_I 两端 K_I 近似为零, 但左端 ($-a$), $K_{II} = 146.8\text{kN}/\text{cm}^{3/2}$, 右端 ($+a$), $K_{II} = 144.3\text{kN}/\text{cm}^{3/2}$.

假设缝的开度足够大, 加载后不压缝. 法向虚拟力和切向虚拟力即表1中的初值, 相应的缝端应力强度因子见表4, 可见在不压缝情况下两缝端 K_{II} 值相差很大. 压缝结果即使缝面未提供剪切阻力 (通常都存在阻力) 至少能使两端 K_{II} 趋于均化也是有利的.

表4 自由缝面拉压剪结果 (单位: $\text{kN}/\text{cm}^{3/2}$)

工况	K_I		K_{II}	
	左端	右端	左端	右端
缝面不接触压剪	-344	-303	190	102
拉剪	303	344	102	190

对于拉剪情况取 $P=100.0\text{kN}$ 拉力. 结果见表4. 比较表4结果, 除 K_I 符号相反外, K_I 和 K_{II} 正好左右端数值对调. 拉剪缝自然是最不利的.

对混合边界中心裂缝情况, 取图5所示结构. 结构上端中部施加法向集中力 $P=100\text{kN}$, 切向集中力 $Q=66\text{kN}$. 底部固定. 缝面 $f=0.7, c=0.0$. 材料为 $E=4\text{GPa}$, $\mu=0.48$. 计算取边界单元数为41, 缝面高斯积分点数为7. 计算结果见图6、图7和图8.

图6为缝内外剪力分布. 图8水平线($f=0.7$)部位切向接触力已达到极限平衡状态, 剩余剪力重新分配. 图7缝内切向接触力总和为 47.38kN , 占总量的71.8%, 其余由两翼分担.

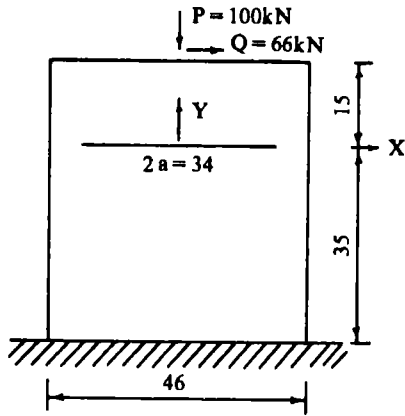


图 5 混合边界内部裂缝压剪

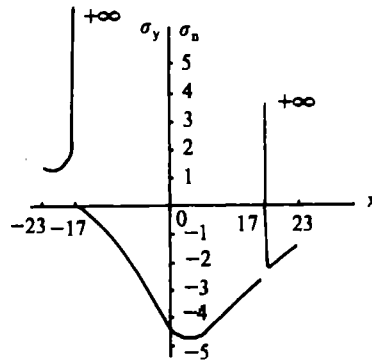


图 6 缝内 σ_n 和缝外 σ_y

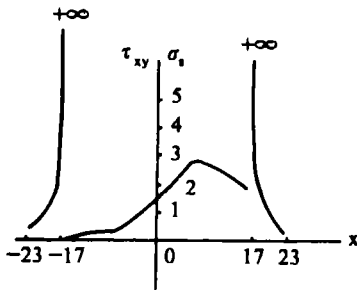


图 7 缝内 σ_n 和缝外 Z_{xy}

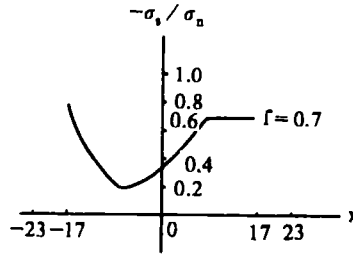


图 8 缝内切向与法向接触力的比值

5 重力坝上下游水平缝压剪作用

某砼重力坝如图 1, 坝高 105.0m, 上游水深 100.0m. 坝体及岩基的弹性模量均为 $E = 2.3 \times 10^7 \text{kN/m}^2$, 泊桑比 $\mu = 0.167$, 坝体砼容重为 $r_h = 24.0 \text{kN/m}^3$. 考虑坝体自重和库水压作用.

(1) 上游水平缝缝长 $C_2 = 5\text{m}$, 离上游基础 8m, 考虑缝面水压作用, 下游无缝. 当不考虑压剪时缝端 $K_I = -653.9 \text{kN/m}^{3/2}$, $K_{II} = 829.3 \text{kN/m}^{3/2}$. 考虑压剪作用后缝端 $K_I = 0.0$, $K_{II} = 534.4 \text{kN/m}^{3/2}$. 可见在缝内水压作用下, 缝面仍可承当部分剪力. 在本方案下均使缝端 K_{II} 值下降 35.6%.

(2) 上下游缝长约为 5m ($C_2 = 5\text{m}$, $C_3 = 5\text{m}$), 位于离基础 3m 的高程上. 当上游缝内受水压作用, 上下游缝面都不接触时求得上游缝 $K_I = 219.1 \text{kN/m}^{3/2}$, $K_{II} = 1664.4 \text{kN/m}^{3/2}$; 下游缝 $K_I = -589.9 \text{kN/m}^{3/2}$, $K_{II} = 3239.2 \text{kN/m}^{3/2}$. 若对下游缝进行修补使之在水压作用下处于压剪状态(压缝), 求得上游缝 $K_I = 88.9 \text{kN/m}^{3/2}$, $K_{II} = 1611.1 \text{kN/m}^{3/2}$; 下游缝 $K_I = 0.0$, $K_{II} = 621.9 \text{kN/m}^{3/2}$. 下游 K_{II} 下降约 80%, 上游缝 K_I 值下降约 60%. 可见施工期对具有一定开度的下游缝进行灌浆填缝是有益的.

当上游面采用防渗处理或在运行期渗流稳定后, 混凝土中的渗透压力减少了缝面水压的作用力. 对缝内水压为零的极端情况再考虑上游缝压剪, 则求得上游缝 $K_I = 0.0$, $K_{II} = 0.0$; 下游缝 $K_I = -5862.2 \text{ kN/m}^{3/2}$, $K_{II} = 3235.8 \text{ kN/m}^{3/2}$. 对上游缝有很大的改善使之接近无损状态. 对下游缝影响甚微.

6 讨论

(1) 压剪缝面的物理状态将直接影响缝端应力强度因子, 显然缝面摩阻力越大缝端越安全. 缝面虚拟力的大小也直接影响其它裂缝的应力强度因子. 不完善的缝面假定将可能导致整个计算成果失效.

(2) 碾压砼压水试验发现的层间裂隙进行低压灌浆是有益的. 因为填塞空间后增加接触面无论是增加层间摩阻力或法向接触应力都导致缝端最大应力强度因子下降.

本研究得到省自然科学基金资助, 特此致谢.

参考文献

- 1 Liu G T, Chi Y. An analytical-fictitious boundary forces method for calculating multi-crack problem in arbitrary region with mixed mode boundaries. Ed. by Shah S P, et al. Fracture of concrete and Rock-Recent Development, London: [s. n], 1989
- 2 Chi Y, Liu G. T. Study on boundary multiple cracks and the stability of horizontal crack in concrete gravity dams. Ed. by Saouma V, et al. Dam fracture, Colorado: [s. n], 1991

Analysis of Finite Body with Multiple Cracks under Pressure-shear Condition

Chi Yuan

(Department of Civil and Architectural Engineering)

Liu Guangting

(Tsinghua University, Beijing)

Abstract Taking departure from the boundary fictitious stress method and using analytical solution of the unit concentrated force applied to the crack surface, this paper deals with the crack element and the simulation of complex shear distribution along the cracking surface, and then it solves the engineering problems with various complex boundary immediately. Compared with other numerical time. One of the other advantages is its adaptability for a wide range of uses in engineering practice.

Keywords crack; SIF; pressure-shear