第20卷 第3期　　福州大学学报(自然科学版)　　Vol.20 No.3
1992年 9月　　Journal of Fuzhou University (Natural Science)　　Sep. 1992

用双能量法计算椭圆柱形电容器和偏心电缆的电容

刘世忠
(电气系)

提　要　应用能量分析法来计算两导体间的电容. 双能量法是把整个电磁装置看作一个系统，从系统处于平衡时的能量有极大值或极小值出发，从而获得系统简单近似的能量分布. 这种近似提供了计算电容准确值的上界和下界值.

关键词　双能量法; 电容器; 偏心电缆

0 前言

当电容电极的几何形状很复杂时，计算其电容相当困难，目前多采用解析法和数值法计算，都需在给定的边界条件下，先算出场域中各点的电位和电场强度，然后才能进行电容计算，计算量大、费用高. 双能量法是把整个电磁装置看作一个系统来研究其能量，它是把精力集中在计算场域中每点的位和场，而是根据能量的变分原理，从系统处于平衡时的能量有极大值或极小值出发，获得简单近似的能量分布. 这种近似提供了计算系统的电容准确值的上界值和下界值. 其计算方法简单、精确度较高，并可节省计算时间和费用.

1 计算方法

双能量法是用两种的不同方式描述能量，即位能和动能，或凹和凸的两种能量泛函. 在平衡时，位能的准确值为最小，而其他近似值提供了上界限; 同样，动能趋于最大值，而近似值提供了下界限(如图 1).

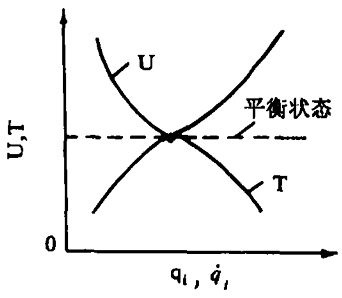

图 1　动能和位能与坐标和速度的关系
U—位能; T—动能; q_i—坐标和$\dot{q}_i$—速度.

静电场最大特点就是有源无旋场. 电位移矢量$\vec{D}$与电荷体密度ρ的关系为:

$$\nabla \vec{D} = \rho \tag{1}$$

而电场强度$\vec{E}$和电位的关系为:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \tag{2}$$

电场能量密度为$\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$或$\frac{1}{2}\rho\varphi$，我们希望把一些场量引入拉格朗日坐标和动量模式中. 如

本文1991年9月16日收到

q(坐标) $\dot{q}$(速度) P(动量) $-\dot{P}$(力)

φ $\vec{E}$ $\vec{D}$ ρ

静电场的能量为标量，可表示为以场参数写出的能量密度的定积分．积分对系统占据的整个空间进行．因此能量是系统参数的泛函．

把式(1)作为虚功原理类似的变分原理来处理，即

$$\langle(\rho-\nabla\cdot\vec{D}),\ \delta\varphi\rangle=0 \tag{3}$$

式中：〈 〉表示标量积的体积分.

我们设法对虚功积分以便表示系统能量的变分，为此，利用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\mu\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\mu+\mu\nabla\cdot\vec{A} \tag{4}$$

而得到

$$<\vec{D},\ \nabla\delta\varphi>-[D_n,\ \delta\varphi]+<\rho,\ \delta\varphi>=0 \tag{5}$$

式中：[ ]表示表面积分．若极板上的电位为给定的$\hat{\varphi}$，则极板上的 $\delta\varphi=0$. 又因场域中的体电荷密度 $\rho=0$，所以仅保留了第一项．因此得：

$$<\vec{D},\ \delta\vec{E}>=0 \tag{6}$$

及
$$\frac{1}{2}\varepsilon<E_2>=\text{常数} \tag{7}$$

因而最后可得到系统的能量为:

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon<E^2> \tag{8}$$

变分原理为:

$$\delta U=\delta(\frac{1}{2}\varepsilon<E^2>)=0 \tag{9}$$

现在来研究静电系统的对偶能量及其变分．即用广义动量$\vec{D}$当作广义坐标，把式(2)作为与虚功原理类似的变分原理来处理，即

$$<(\nabla\varphi+\vec{E}),\ \delta\vec{D}>=0 \tag{10}$$

利用矢量恒等式(4)，可将上式化成:

$$<-\varphi,\ \nabla\cdot\delta\vec{D}>+[\varphi,\ \delta D_n]+<\vec{E},\ \delta\vec{D}>=0 \tag{11}$$

若假定电极上的电荷为$\hat{\varphi}$，则 $\delta D_n=0$，因此上式化成：

$$-<\varphi,\ \delta\rho>+<\vec{E},\ \delta\vec{D}>=0 \tag{12}$$

由于$\delta\rho=0$，上式第一项为零，简化成:

$$<\vec{E},\ \delta\vec{D}>=0 \tag{13}$$

及
$$\frac{1}{2\varepsilon}<D^2>=\text{常数} \tag{14}$$

因此系统的对偶能量为:

$$U'=\frac{1}{2\varepsilon}<D^2> \tag{15}$$

变分原理为:

$$\delta U' = \delta\left(\frac{1}{2\varepsilon} < D^2 >\right) = 0 \tag{16}$$

注意，式 (9) 和 (16) 二阶变分 $\delta^2 U$ 和 $\delta^2 U'$ 两者均为正的，从而对所述的变分来说 U 和 U' 都是极小值，都具有位能的性质．

现在来研究如何应用这些能量变分原理来计算电容．式 (9) 是在规定了电极电位 $\hat{\varphi}$ 后得到的能量变分，则式 (9) 可改写成如下形式：

$$\delta\left(\frac{1}{2} C\hat{\varphi}^2\right) = 0 \tag{17}$$

因式 (9) 和 (17) 为等值的，均具有位能性质．所以变分原理表达式指的是平衡时能量有极小值，电容 C 也为极小值．因此任一近似值提供的将是电容的上界值，记为 $C_{上}$．

式 (16) 是规定了电极上电荷 $\hat{\varphi}$ 后所得到的对偶能量的变分．若用电容 C 表示系统中的对偶能量分，则式 (16) 可改写成如下形式：

$$\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\hat{\varphi}^2}{C}\right) = 0 \tag{18}$$

因为式 (16) 和 (18) 为等值的，也均有位能的性质，系统平衡时，对偶能量也为极小值，而电容 C 就为极大值．因此任一近似值提供的将是电容的下界值，记为 $C_{下}$．

最后将所得到的电容近似值的 $C_{上}$ 和 $C_{下}$，取它们的平均值，就得到我们要求精确值 C_0．

2 应用实例

(1) 椭圆柱形电容器的电容

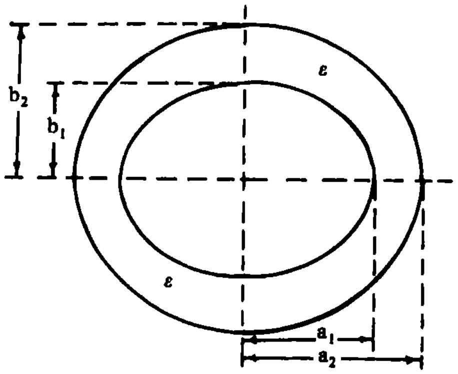

图 2　椭圆柱形电容器的断面图

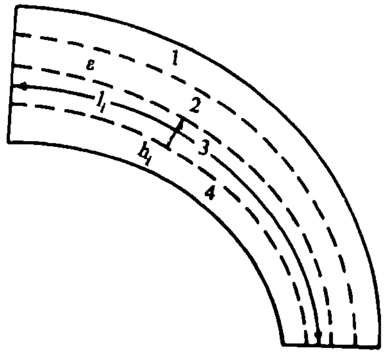

图 3　虚线表示等位线可能分布的情况

本电容器的几何形状如图 2 所示．其中 $a_1 = 10\text{cm}$；$a_2 = 12\text{cm}$；$b_1 = 4.36\text{cm}$；$b_2 = 7.94\text{cm}$，极间的介质的介质系数为 ε，求单位长电容 C_0．

因图形具有对称性，所以取出图形的 1／4 进行计算即可．首先规定电极上的电荷为 $\hat{\varphi}$，设等位线可能分布的情况如图 3 所示．图中三条等位线用虚线表示．它们将两电极间的场域划分成 4 个小区域相当于 4 个电极为弧形的电容器相串联．为计算方便，将它们分别等效于一平行板电容器．平行板平均宽度为 l_i，其间平均距离为 h_i．分别计算出 4 个

等效的平行板电容器的电容，将其相串联后，乘上 4，就得到求电容 C_0 的下界值：

$$C_{下}=\frac{4}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}}=18.56\varepsilon F$$

其次规定两电极上的电位为$\hat{\varphi}$，两电极间的电力线可能分布的情况如图 4 所示．电力线将电极间的场域分成 9 个小区域，就相当于 9 个小电容器相并联．为计算方便将它们等效成平行板电容器．分别由图中量出它们的平均宽度 l_i 和平均的电极间距离 h_i．就可分别计算它们的等效电容．将以上 9 个等效电容相加乘以 4 就得到求电容 C_0 的上界值：

$$C_{上}=4(C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_9)=19.24\varepsilon F$$

取上下界值的平均值，就得到单位长电容的精确值为：$C_0=\dfrac{C_{上}+C_{下}}{2}=18.9\varepsilon F$

本电容器可用复位函数法计算[3]，其结果为：$C_{0复}=19.135\varepsilon F$

也可用边界元法计算[4]，其结果如下：$C_{0边}=19.160\varepsilon F$

比较以上三种方法的计算结果，都十分接近.

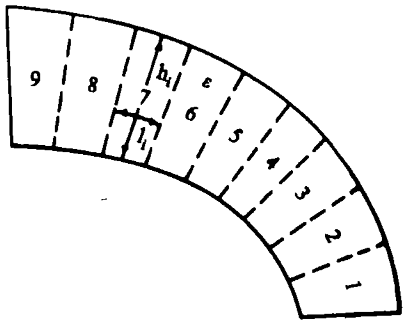

图 4 虚线表示电力线分布的可能情况

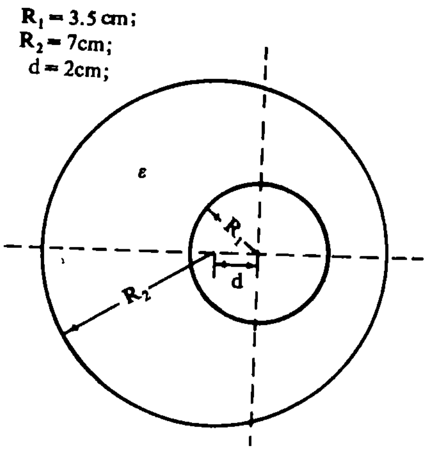

图 5 偏心电缆的断面图

2 偏心电缆的电容

偏心电缆的断面图及其几何尺寸如图 5 所示．极间的介质系数为 ε．求单位长电容 C_0．由于图形上下对称性，因此取出图形的 1／2 进行计算即可．

首先规定两电极上的电荷为$\hat{Q}$，等位线分布的可能情况如图 6 中的虚线所示．等位线将两电极间的场域分成 4 个小区域，它们相当于 4 个小电容器相串联．为了便于计算这电极形状为弧形的电容器，把它们分别等效成一个平行板电容器．在图上量出它们平均宽度 l_i 和两极间平均距离 h_i．分别计算出它们等效电容值．将以上 4 个电容相串联后乘上 2，就得到求电容 C_0 的下界值:

$$C_{下} = \frac{2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}} = 9.4\varepsilon F$$

其次规定两极板上的电位为$\hat{\varphi}$，电力线可能分布的情况如图 7 中虚线所示．电力线将两电极的场域分成 10 个小区域，也相当于 10 个小电容器相并联．为了计算方便，也将它们分别等效成一平行板电容器．由图中量出它们的平均宽度 l_i 和平均的两极间距离 h_i．分别计算出它们的等效电容，将它们相加再乘上 2，就得到求 C_0 的上界值：

$$C_{上} = 2(C_1 + C_2 + C_3 + \cdots\cdots + C_{10}) = 11.4\varepsilon F$$

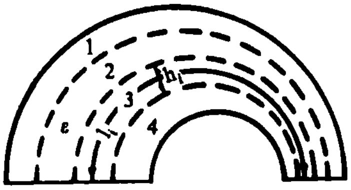

图 6　虚线表示等位线分布的可能情况

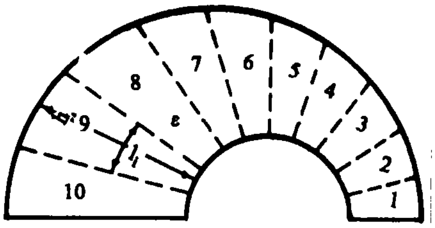

图 7　虚线表示电力线分布可能情况

将所求得的上、下界值相加取其平均值，就得到单位长电容C_0：

$$C_0 = \frac{C_{上} + C_{下}}{2} = 10.42\varepsilon F$$

本例可用电轴法计算[4]，其结果为：　$C_{0电轴} = 10.972\varepsilon F$

用边界元法计算[4]，其结果为：　$C_{0边界} = 10.897\varepsilon F$

用三种方法计算本例的电容，其结果都基本相符.

本方法不但能计算前面所述的两种电容器的电容，而且能用来计算用解析法无法计算和用数值法很难计算的电极几何形状很复杂的电容器的电容.

参考文献

1 Hammod P. Energy megthods in electromagnetism. Oxford: Clarendon press, 1981

2 刘　永. 分析力学. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1984

3 刘世忠. 用边界元法计算矩形同轴带状传输线和椭圆柱形电容器的电容. 电杂志. 1989(3): 28

4 刘世忠. 用边界元法计算偏心电缆的漏电导和三相水电阻器的电阻. 电器技术. 1988(3): 38

Calculation of Capacitances of Elliptic Cylinder Capacitor and Eccentic Cable by Dual Energy Method

Liu Shizhong

(Department of Electrical Engineering)

Abstract　The dual energy method is a way of treating the energy of the whole device as a system. By noticing that the system energy at equilibrium has a maximum or a minimum value, it can obtain relatively simple approximations to the energy distribution. These approximations provide both the upper and the lower bounds of the accurate values in calculating the capacitances. The calculative method is simple, the accuracy is high, and so a great amount of calculative labour and expenses can be saved.

Keywords dual energy method; capacitance; eccentic cable