改进的 Riemann-Stieltjes 积分序列弱收敛的某些定理

黄可明
(数学系)

提　要　本文讨论了在 $z=[a_1\ b_1]\times[a_2\ b_2]$上随机场序列$\xi_n(\vec{t})\vec{t}\in z$，关于$\eta_n(\vec{t})\vec{t}\in z$改进的 Riemann-Stieltjes 积分序列$\int_z \xi_n(\vec{t})d\eta_n(\vec{t})$，弱收敛于$\int_z \xi_0(\vec{t})d\eta_0(\vec{t})$，　$n\to\infty$的某些定理.

关键词　Riemann-Stieltjes 积分；本性间断点；D_z空间

设$z=z_1\times z_2$，且z_i为$[a_i\ b_i](i=1,\ 2)$上含a_i和b_i的，处处稠密的可列集.

观察z上的有穷分割序列α_n的所有集族L_z：

$$\alpha_n=\{\vec{t}_{ij}^{(n)}=(t_{1i}^{(n)},\ t_{2j}^{(n)})\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n\}$$

其中：$a_1=t_{11}^{(n)}<t_{12}^{(n)}<\cdots<t_{1n}^{(n)}=b_1$；　$a_2=t_{21}^{(n)}<t_{22}^{(n)}<\cdots<t_{2n}^{(n)}=b_2$.

这种分割将 z 分为有限个小区域，其任一区间：$\Delta z_{ij}^{(n)}=[t_{1i}^{(n)},\ t_{1i+1}^{(n)}]\times[t_{2j}^{(n)},\ t_{2j+1}^{(n)}]$.

这种分割α_n还满足：

(*a*) $\alpha_n\subseteq\alpha_{n+1}\subset z$；

(*b*) 对任何$\vec{t}\in z$，可以找到$n_{\vec{t}}$，使得对任意$n>n_{\vec{t}}$，有$\vec{t}\in\alpha_n$.

D_z为函数空间，函数$y(\cdot)\in D_z$满足以下条件：

(1) $y(\cdot)$仅在z中递增，即

$$y(t_1,\ t_2)\geqslant y(t_1',\ t_2)\qquad 如果t_1>t_1'$$

$$y(t_1,\ t_2)\geqslant y(t_1,\ t_2')\qquad 如果t_2>t_2'$$

且对所有$\vec{S}=(s_1,\ s_2)$，$\vec{t}=(t_1,\ t_2)\in z$，且$\vec{s}\leqslant\vec{t}$有

$$\Delta_{\vec{s},\ \vec{t}}(y(\cdot))=y(\vec{t})-y(s_1,\ t_2)-y(t_1,\ s_2)+y(\vec{s})\geqslant 0$$

(2) $y(\vec{t})=\lim\limits_{\substack{|\vec{s}-\vec{t}|\to 0\\ \vec{s}\in M_{\vec{t}}^{(\beta_1\ \beta_2)}}}y(\vec{s})$，其中 $(\beta_1\ \beta_2)=(+\ \ +)$，$(+\ \ -)$，$(-\ \ +)$，$(-\ \ -)$；

$M_{\vec{t}}^{(\beta_1\ \beta_2)}$为与$\vec{t}$有关的点集：

$$M_{\vec{t}}^{(+\ +)}=\{\ \vec{s}\in z:\ \ s_1\geqslant t_1,\ s_2\geqslant t_2\}$$

$$M_{\vec{t}}^{(-\ +)}=\left\{\ \vec{s}\in z:\ \begin{array}{ll} s_1<t_1,\ s_2\geqslant t_2 & 如果t_1\neq a_1\\ s_1=a_1,\ s_2\geqslant t_2 & 如果t_1=a_1\end{array}\right\}$$

本文1991年10月15日收到

$$M_{\vec{t}}^{(+\,-)}=\left\{\vec{s}\in z:\begin{array}{ll}s_1\geqslant t_1,\ s_2<t_2 & \text{如果}t_2\neq a_2\\ s_1\geqslant t_1,\ s_2=a_2 & \text{如果}t_2=a_2\end{array}\right\}$$

$$M_{\vec{t}}^{(-\,-)}=\left\{\vec{s}\in z:\begin{array}{ll}s_1<t_1,\ s_2<t_2 & \text{如果}t_1\neq a_1,\ t_2\neq a_2\\ s_1=a_1,\ s_2<t_2 & \text{如果}t_1=a_1,\ t_2\neq a_2\\ s_1<t_1,\ s_2=a_2 & \text{如果}t_1\neq a_1,\ t_2=a_2\\ s_1=a_1,\ s_2=a_2 & \text{如果}t_1=a_1,\ t_2=a_2\end{array}\right\}$$

令 $\lambda_n=\max\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}\left\{(t_{1i}^{(n)}-t_{1i-1}^{(n)}),\ (t_{2j}^{(n)}-t_{2j-1}^{(n)})\right\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0.$

对每个分割α_n，定义其积分的上和及下和.

设$x(\vec{t})$在$\Delta z_{ij}^{(n)}$上的上确界和下确界分别为M_{ij}和m_{ij}，做和数:

$$S^+(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\cdot\Delta_{ij}^{(n)}(y(\cdot))$$

$$S^-(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\cdot\Delta_{ij}^{(n)}(y(\cdot))$$

其中$\Delta_{ij}^{(n)}(y(\cdot))=\Delta_{\vec{t}_{ij}\vec{t}_{i+1,\ j+1}}(y(\cdot))$. 那么对所有$\alpha_n$、$x(\cdot)$、$y(\cdot)$有

$$-\infty<S^-(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))<S^+(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))<\infty$$

及对任何 $\alpha_n\in L_z$，$S^+(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))$，$S^-(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))$分别关于$n$单调非增与单调非减，因此存在它们的有穷极限：

$$\lim_{n\to\infty}S^+(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))=\bar{\int_z}x(\vec{t})\mathrm{d}y(\vec{t})=S_z^+(x(\cdot),\ y(\cdot))$$

$$\lim_{n\to\infty}S^-(\alpha_n,\ x(\cdot),\ y(\cdot))=\int_{\bar{z}}x(\vec{t})\mathrm{d}y(\vec{t})=S_z^-(x(\cdot),\ y(\cdot))$$

与序列$\alpha_n\in L_z$的选择无关.

定义 1　对于某个集合z，如果等式$S_z^+(x(\cdot),\ y(\cdot))=S_z^-(x(\cdot),\ y(\cdot))$成立，则称改进的$x(\cdot)$关于$y(\cdot)$的 Riemann – Stieltjes 积分存在，记

$$S_z^+(x(\cdot),\ y(\cdot))=S_z^-(x(\cdot),\ y(\cdot))=\int_z x(\vec{t})\mathrm{d}y(\vec{t})$$

定义 2　z 中点$\vec{t}_0=(t_1,\ t_2)$和为函数$y\ (\cdot)$的本性间断点，如果对于每个$\vec{t}_1=(t_1+0,\ t_2+0)$有

$$\Delta_{\vec{t}_0\vec{t}_1}(y(\cdot))\triangleq y(t_1+0,\ t_2+0)-y(t_1,\ t_2+0)-y(t_1+0,\ t_2)+y((t_1,\ t_2)>0$$

设$\xi_n(\vec{t})$，$\eta_n(\vec{t})$，$\vec{t}\in z$为定义在全概率空间$(\Omega,\ £,\ \mathrm{P})$上依赖于$n\geqslant 0$的实值随机场，它具有以下两个性质：

(1) 在z中一处处稠密可列子集z^*上，$\xi_n(\vec{t})$的上确界和下确界以概率 1 为有限随机

变量时，场 $\xi_n(\vec{t})$ 是可分的．

(2) 场 $\eta_n(\vec{t})$ 的曲线以概率1属于 D_z 空间．

定理1　设以下条件成立:

(1) $\sup\limits_{\vec{t}\in z}\xi_n(\vec{t}) \xrightarrow{W} \sup\limits_{\vec{t}\in z}\xi_0(\vec{t}) \quad n\to\infty$，且 $\eta_n(\vec{t}) \xrightarrow{W} \eta_0(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \quad n\to\infty$

$\inf\limits_{\vec{t}\in z}\xi_n(\vec{t}) \xrightarrow{W} \inf\limits_{\vec{t}\in z}\xi_0(\vec{t}) \quad n\to\infty$，且 $\eta_n(\vec{t}) \xrightarrow{W} \eta_0(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \quad n\to\infty$

(2) 改进的Riemann－Stieltjes积分 $\int_z \xi_0(\vec{t})d\eta_0(\vec{t})$ 存在，那么

$$S_z^{\pm}(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})d\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

证明　由定理条件(1)，我们有:　对 $\forall\alpha_k\in L_z$

$$\left.\begin{aligned}&S^+(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} S^+(\alpha_k,\ \xi_0(\cdot),\ \eta_0(\cdot)) \qquad n\to\infty\\ &S^-(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} S^-(\alpha_k,\ \xi_0(\cdot),\ \eta_0(\cdot)) \qquad n\to\infty\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

又由上和及下和的定义，对每个 $k\geqslant 0$ 有:

$$\left.\begin{aligned}&S^+(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\geqslant S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\\ &S^-(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\leqslant S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \quad (a\cdot s)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

成立，以及以概率1有:

$$\left.\begin{aligned}&S^+(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\to S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \qquad k\to\infty\\ &S^-(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\to S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \qquad k\to\infty\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

再由定理中条件(2)，以概率1有:

$$S_z^+(\xi_0(\cdot),\ \eta_0(\cdot)) = S_z^-(\xi_0(\cdot),\ \eta_0(\cdot)) = \int_z \xi_0(\vec{t})d\eta_0(\vec{t}) \tag{4}$$

现根据(1)，(2)，(3)和(4)式，对任意 $\delta>0$，有:

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left\{|s_z^{\pm}((\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) - S^{\pm}(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))| > \delta\right\}$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left\{S^+((\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) - S^-(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) > \delta\right\} = 0 \tag{5}$$

最后根据(1)，(4)及(5)式，由文献[3]中的定理4.2推出定理的证明，即

$$S_z^{\pm}(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})d\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

推论1　如果定理1中的条件成立，则对任何满足

$$S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\leqslant S_n\leqslant S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))$$

的随机变量序列 S_n，有

$$S_n \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

推论 2　对任何 $n>0$，随机场 $\xi_n(\vec{t})$ 关于 $\eta_n(\vec{t})$ 的改进的 Riemann - Stieltjes 积分 $\int_z \xi_n(\vec{t})\mathrm{d}\eta_n(\vec{t})$ 存在，则当定理 1 中条件成立时，有

$$\int_z \xi_n(\vec{t})\mathrm{d}\eta_n(\vec{t}) \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

定理 2　设对于 $z\supseteq u_0$，u_0 为 $\xi_0(\vec{t})$ 的间断点，同时又可以为 $\eta_0(\vec{t})$ 的本性间断点的集合，如果以下条件成立：

(1) $\xi_n(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \xrightarrow{W} \xi_0(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \quad n\to\infty$，且 $\eta_n(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \xrightarrow{W} \eta_0(\vec{t}) \quad \vec{t}\in z \quad n \to\infty$

(2) 对 $\forall\delta>0$，$\lim\limits_{k\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\left\{\sum\limits_{i,\ j=1}^{k}[\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n(\cdot)]>\delta\right\}=0$

其中：$\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)=\sup\limits_{\vec{t}\in\Delta z_{ij}^{(k)}}|M_{ij}-m_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,k$；$j=1,2,\cdots,k$；$\alpha_k\in L_z$；$M_{ij}$、$m_{ij}$ 分别为 $\xi_n(\vec{t})$ 在 $\Delta z_{ij}^{(k)}$ 上的上，下确界；

(3) 改进的Riemann - Stieltjes积分 $\int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t})$ 存在；那么：

$$S_z^{+}(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

$$S_z^{-}(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot)) \xrightarrow{W} \int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t}) \qquad n\to\infty$$

证明　对 α_k 分割中令：$\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_n(\vec{t}_{ij}^{(k)})\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n(\cdot)=S_{z,\ n,\ k}$. 当 $n=0$ 时为 $S_{z,\ 0,\ k}$，即 $S_{z,\ 0,\ k}=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_0(\vec{t}_{ij}^{(k)})\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_0(\cdot)$. 那么由定理 2 中的条件 (1) 有：对 $\forall k$，

$$S_{z,\ n,\ k} \xrightarrow{W} S_{z,\ 0,\ k} \qquad n\to\infty \tag{6}$$

又对所有k，以概率1有

$$S^{-}(\alpha_k,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\leqslant S_{z,\ n,\ k}\leqslant S^{+}(\alpha_n,\ \xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))$$

再由条件(3)，以概率1有

$$S_{z,\ 0,\ k}\to\int_z \xi_0(\vec{t})\mathrm{d}\eta_0(\vec{t}) \qquad k\to\infty \tag{7}$$

由条件(2)有

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{|s_z^{\pm}(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_{z,\ n,\ k}|>\delta\right\}$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{\sum_{i,\ j=1}^{k}[\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n(\cdot)]>\delta\right\}=0 \tag{8}$$

最后，由(6)，(7)，(8)式和[3]中的定理4.2，定理2得证.

定理 3　设对每个 $n\geqslant 0$，$\eta_n(\vec{t})$ 和 $\eta_n'(\vec{t})$ 为随机场，$\xi_n(\vec{t})$ 的曲线以概率 1 属于 D_z，又设以下条件成立：

(1) $\varphi_n(\vec{t})=\eta_n(\vec{t})-\eta_n'(\vec{t})\xrightarrow{P}0\qquad \vec{t}\in z\qquad n\to\infty$

(2) $\lim\limits_{N\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\{\sup|\xi_n(\vec{t})|>N\}=0$

(3) $\lim\limits_{K\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n(\cdot)>\delta\right\}=0$

(4) $\lim\limits_{K\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta'_n(\cdot)>\delta\right\}=0$

那么有:

$$S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n'(\cdot))\xrightarrow{P}0\qquad n\to\infty \tag{9}$$

$$S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\xrightarrow{P}0\qquad n\to\infty \tag{10}$$

证明: 只证明(9)式，(10)式同理可证.

对$\forall\delta>0$有:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_{z,n,k}+S_{z,n,k}-S_{z,n,k}'+S_{z,n,k}'-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_{z,\ n,\ k}|>\delta/3\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_{z,n,k}'-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta/3\right\}+\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_{z,n,k}-S'^-_{z,n,k}|>\delta/3\right\}$$

$$\leqslant\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n(\cdot)>\delta/3\right\}$$

$$+\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}^{(k)}\xi_n(\cdot)\cdot\Delta_{ij}^{(k)}\eta_n'(\cdot)>\delta/3\right\}$$

$$+\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}})P\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sup_{\vec{t}\in\Delta z_{ij}^{(k)}}|\xi_n(\vec{t})|\cdot|\varphi_n(\vec{t})|>\delta/3\right\}$$

由条件(3)和(4)知

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_z^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_z^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}$$

$$\leqslant \lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sup_{\vec{t}\in\Delta s_{ij}^{(k)}}|\xi_n(\vec{t})|\cdot|\varphi_n(\vec{t})|>\delta/3\right\}$$

$$=\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{(\sup_{\vec{t}\in s}|\xi_n(\vec{t})|>N)\bigcap(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sup_{\vec{t}\in\Delta s_{ij}^{(k)}}|\xi_n(\vec{t})|\cdot|\varphi_n(\vec{t})|>\delta/3\right\}$$

$$+\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{(\sup_{\vec{t}\in s}|\xi_n(\vec{t})|\leqslant N)\bigcap(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sup_{\vec{t}\in\Delta s_{ij}^{(k)}}|\xi_n(\vec{t})|\cdot|\varphi_n(\vec{t})|>\delta/3\right\}$$

而 $$\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{(\sup_{\vec{t}\in s}|\xi_n(\vec{t})|>N)\bigcap(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sup_{\vec{t}\in\Delta s_{ij}^{(k)}}|\xi_n(\vec{t})|\cdot|\varphi_n(\vec{t})|>\delta/3\right\}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{(\sup_{\vec{t}\in s}|\xi_n(\vec{t})|>N\}$$ 成立.

为要证明原式 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{|S_s^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_s^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}$ 与N无关，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_s^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_s^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{(\sup_{\vec{t}\in s}|\xi_n(\vec{t})|>N\}+\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|\varphi_n(\vec{t}_{ij}^{(k)})|>\frac{\delta}{3N}\right\}$$

令$N\to\infty$，由条件(1)和(2)有:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|S_s^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_s^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))|>\delta\right\}=0$$

即 $$S_s^+(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))-S_s^-(\xi_n(\cdot),\ \eta_n(\cdot))\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty$$

推论3 如果定理3的条件成立，对$\forall n>0$存在着改进的随机积分

$$\int_s\xi_n(\vec{t})d\eta_n(\vec{t})\text{和}\int_s\xi_n(\vec{t})d\eta_n'(\vec{t})$$

那么 $$\int_s\xi_n(\vec{t})d\eta_n(\vec{t})-\int_s\xi_n(\vec{t})d\eta_n'(\vec{t})\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty$$

参考文献

1 Сильвестров Д С. Предельные теоремы для сюжных случайных функций. Кишв: Випіа школа, 1974

2 Гихманин, Скороход А В. Введению случайных процессов. Москва: Наука, 1972

3 Биллинголи. Сходимость вероятностных мер. Москва: Наука, 1977

4 Петровв. 独立随机变量之和的极限定理. 苏淳，黄可明译. 合肥: 中国科学技术大学出版社，1991

5 王梓刊. 随机过程论. 北京: 科学出版社. 1978

6 陆传荣，林正炎，陆传赉. 概率论极限理论引论. 北京: 高等教育出版社，1989

Some Theorems of Weak Convergence for Sequence of Modified Riemann–Stietjes Integral

Huang Keming
(Department of Mathematics)

Abstract The present paper discusses some theorems of weak convergence for sequence of modified Riemann–stieltjes integral $\int_{z} \xi_n(\vec{t}) d\eta_n(\vec{t})$ in $Z=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, when $n\to\infty$.

Keywords modified Riemann–Stieltjes integral; essential discontinuity point; space D_z