# 解色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的绝对稳定高精度半显式格式

林鹏程
(计算机系)

**摘　要**　本文对色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的初边值问题，构造两个绝对稳定的半显式格式，其局部截断误差为 $O(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{h^2})$，精度较高.

**关键词**　色散方程；绝对稳定；半显式格式

## 0 引言

近年来，由于孤立子的产生，引起人们对色散方程 $u_t = au_{xxx}$($a$ 为常数，可正可负）产生了浓厚的兴趣[1~8]，显式格式的稳定性限制较强，而隐式格式虽可作到绝对稳定且高精度[6,7]，但每前进一步均需解一个四对角线型或五对角线型的方程组，工作量较大．为了解决这些困难，文献 [9] 构造了一类绝对稳定的半显式格式，它在所要求计算的那一层上只涉及到相邻的两个网格点，既绝对稳定，又可直接计算，但其局部截断误差仅为 $O(\tau + h^2 + \frac{\tau^2}{h^3})$. 本文构造一类绝对稳定的半显式格式，其局部截断误差为 $O(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{h^2})$.

考虑色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的初边值问题，其中 $a$ 为常数，可正可负.

当 $a > 0$ 时，假设初边值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}, & a > 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,\ 0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,\ t) = g_1(t),\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = g_2(t),\quad u(1,\ t) = g_3(t), & t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

当 $a < 0$ 时，假设初边值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}, & a < 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,\ 0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,\ t) = g_1(t),\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,\ t) = g_2(t),\quad u(1,\ t) = g_3(t), & t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

## 1 差分格式的构造

设 h 和 $\tau$ 分别表示空间方向和时间方向的步长，$h = 1/N$，网域由求解区域上的点集

本文1991年10月15日收到

$(x_m, t_n)$ 所构成，其中 $x_m = mh$，$t_n = n\tau (m = 0, 1, \cdots, N;\ n = 0, 1, \cdots)$. 在结点 $(x_m, t_n)$ 处，用 $u_m^n$ 和 $U_m^n$ 分别表示微分方程和差分格式的解．

由Taylor展开得

$$(u_t)_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}[(u_t)_{m+1}^n + (u_t)_m^n] - \frac{h^2}{8}(u_{txx})_{m+1/2}^n + O(h^4) \tag{1.1}$$

$$(u_t)_{m+1}^n = \frac{1}{2\tau}(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1}) + O(\tau^2) \tag{1.2}$$

$$(u_t)_m^n = \frac{1}{2\tau}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) + O(\tau^2) \tag{1.3}$$

$$(u_{xxx})_{m+1/2}^n = \frac{1}{h^3}(u_{m+2}^n - 3u_{m+1}^n + 3u_m^n - u_{m-1}^n) - \frac{h^2}{8}(u_{xxxxx})_{m+1/2}^n + O(h^4) \tag{1.4}$$

$$-2u_{m+1}^n + 2u_m^n = -u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^{n+1} + u_m^{n-1} + O(\tau^2 h) \tag{1.5}$$

将(1.2)，(1.3)代入(1.1)有

$$(u_{xxx})_{m+1/2}^n = \frac{1}{h^3}(u_{m+2}^n - u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^n + u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - u_{m-1}^n)$$
$$- \frac{h^2}{8}(u_{xxxxx})_{m+1/2}^n + O(\frac{\tau^2}{h^2} + h^4) \tag{1.7}$$

由于 $(u_{txx})_{m+1/2}^n = a(u_{xxxxx})_{m+1/2}^n$，将(1.6)和(1.7)代入 $(u_t)_{m+1/2}^n = a(u_{xxx})_{m+1/2}^n$，则得

$$\frac{1}{4\tau}\left( u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^{n+1} - u_m^{n-1} \right) = \frac{a}{h^3}(u_{m+2}^n - u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^n + u_m^{n+1}$$
$$+ u_m^{n-1} - u_{m-1}^n) + O\left(a\frac{\tau^2}{h^2} + \tau^2 + h^4\right)$$

令 $r = a\frac{\tau}{h^3}$，且舍去上式中的余项，即得本文构造的差分格式

$$\frac{1}{4}\left( U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^{n-1} + U_m^{n+1} - U_m^{n-1} \right)$$
$$= r\left( U_{m+2}^n - U_{m+1}^n - U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^{n-1} + U_m^n + U_m^{n+1} + U_m^{n-1} - U_{m-1}^n \right) \tag{1.8}$$

或下列的两个差分格式

$$(\frac{1}{4} + r)U_{m+1}^{n+1} = (r - \frac{1}{4})U_m^{n+1} + [rU_{m+2}^n - rU_{m+1}^n + rU_m^n - rU_{m-1}^n + (\frac{1}{4} - r)U_{m+1}^{n-1}$$
$$+ (\frac{1}{4} + r)U_m^{n-1}] \qquad \text{当} a > 0 \tag{1.8$'$}$$

$$(\frac{1}{4} - r)U_m^{n+1} = (-r - \frac{1}{4})U_{m+1}^{n+1} + [rU_{m+2}^n - rU_{m+1}^n + rU_m^n - rU_{m-1}^n$$
$$+ (\frac{1}{4} - r)U_{m+1}^{n-1} + (\frac{1}{4} + r)U_m^{n-1}] \qquad \text{当} a < 0 \tag{1.8$''$}$$

## 2 差分格式稳定性分析

在研究差分格式稳定性之前，先叙述如下的Miller准则[10]：复系数二次方程

$$A\lambda^2 = 2B\lambda + C = 0 \qquad A \neq 0$$

当$|A| = |C|$时具有模为1的不等复根的充要条件为$\bar{A}B = \bar{B}C$且$|B| < |A|$.

下面用Fourier分析法来研究差分格式的稳定性.令

$$U_m^n = \lambda^n e^{im\alpha}, \quad i^2 = -1, \quad |\alpha| < \pi$$

代入差分格式(1.8)，整理得

$$\left[\left(\frac{1}{4}+r\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{1}{4}-r\right)e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right]\lambda^2 - r\left(e^{i\frac{3\alpha}{2}} - e^{-i\frac{3\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\lambda$$

$$-\left[\left(\frac{1}{4}-r\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{1}{4}+r\right)e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right] = 0$$

记　$$f(\lambda) = \left[\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2r\sin\frac{\alpha}{2}\right]\lambda^2 - 2ri\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\lambda - \left[\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2ri\sin\frac{\alpha}{2}\right] = 0$$

此时　$$A = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2ri\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$C = -\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2ri\sin\frac{\alpha}{2}\right] = -\bar{A}$$

$$B = -ir\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = -ir\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) - 2ir\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$$

显然，$|A| = |C|$，$|\bar{A}B - \bar{B}C| \equiv |\bar{A}(B + \bar{B})| \equiv 0$，故由 Miller 准则知，差分格式 (1.8) 稳定的充要条件为 $|B| < |A|$，即

$$\left|2r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right| < \left|\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + i\cdot 2r\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

上式对任何 $r$ 均成立，故差分格式 (1.8)′ 和 (1.8)″ 对任何 $a(a>0$ 或 $a<0)$ 均绝对稳定 .

## 3 差分格式的计算

从第二节可以得出，差分格式(1.8)的形象化图象为

$$\begin{array}{ccccc}
 & o & o & & n+1 \\
o & o & o & o & n \\
 & o & o & & n-1 \\
m-1 & m & m+1 & m+2 &
\end{array}$$

下面我们以色散方程的初边值问题(1)(此时 $a>0$)为例，说明差分格式(1.8)′ 的计算步骤如下:

(1) 由初值条件计算出第 0 层网格函数值 $u_m^0 = f(x_m)(m = 0, 1, \cdots, N)$.

(2) 由左，右边值条件定出第一层边界网格函数值 $u_0^1 = g_1(\tau)$，$u_N^1 = g_3(\tau)$，再由其它方法 ( 例如两层显格式等 ) 定出第一层其他网格函数值 $u_m^1(m = 1, \cdots, N-1)$，再利用第二个左边界条件的离散化形式$\left(u_1^1 - u_{-1}^1\right)/2h = g_2(\tau)$ 定出 $u_{-1}^1$.

(3) 用左、右边界条件定出 $u_0^2 = g_1(2\tau)$，$u_N^2 = g_3(2\tau)$，再按差分格式 (1.8)′ 递推计算出 $u_1^2 \to u_2^2 \to \cdots \to u_{N-1}^2$. 由于此时 (1.8)′ 的递推系数因子 $\left|\dfrac{r-1/4}{r+1/4}\right| < 1$($a>0$ 时有 $r>0$). 递推时误差不会增长，否则如用差分格式 (1.8)″，则因递推因子 $\left|\dfrac{-r-1/4}{1/4-r}\right| > 1$($r>0$)，递推误差会迅速增长．再利用 $\left(u_1^2 - u_{-1}^2\right)/2h = g_2(2\tau)$ 定出 $u_{-1}^2$.

(4) 一层层地按 (3) 的方式进行计算．如果是初边值问题 (2)，由于 $a<0$，此时差分格式应选取 (1.8)″，只要对上述计算步骤略加修改，即在 (2) 中由 $\left(u_{N+1}^1 - u_{N-1}^1\right)/2h = g_2(\tau)$ 定出 $u_{N+1}^1$. 在 (3) 中，按差分格 (1.8)″ 自右至左地递推计算出 $u_{N-1}^2 \to u_{N-2}^2 \cdots$，$u_1^2$. 再利用 $\left(u_{N+1}^2 - u_{N-1}^2\right)/2h = g_2(2\tau)$ 定出 $u_{N+1}^2$.

## 参考文献


1 秦孟兆. 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的差分格式. 计算数学，1984(6): 1～13

2 黎益，李北杰. 关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两个显式差分格式. 计算数学，1986(8): 275～280

3 邬华漠. 一类具高稳定性的三层显式格式 $H_3$. 计算数学，1986(8): 329～331

4 林鹏程. 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一类高稳定性的三层显式格式. 应用数学和力学，1988(9): 803～808

5 金承日. 关于色散方程的具有高稳定性的显式差分格式. 计算数学，1989(11): 93–94

6 黎益，李北杰. 逼近色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的高精度差分格式. 四川大学学报，1985(4): 12～21

7 曾文平. 解色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度差分格式. 计算数学，1987(9): 403～410

8 戴嘉尊，赵宁，徐云. 关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 一类显式差分格式的讨论. 计算数学，1989(11): 172～177

9 曾文平. 关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一类绝对稳定的半显式格式. 计算数学，1988(10): 248～252

10 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis. J Inst Math Appls, 1971(8): 397～406


# Absolute Stable High Accuracy Semi–Explicit Difference Scheme for Solving Dispersive Equation $U_t = au_{xxx}$


Lin Pengcheng

(Department of Computer Science)



**Abstract** Two absolute stable and high accuracy semi–explicit difference schemes where $r = \dfrac{q\tau}{h^3}$ for solving the initial boundary value problems of the dispersive equation $u_t = au_{xxx}$ are constructed. The local truncation errors for these difference schemes are $O(\tau^2 + h^4 + \dfrac{\tau^2}{h^2})$.



**Keywords** dispersive equation; absolute stable; semi–explicit schemes