

论裂纹尖端附近位移场 精确解的封闭形式

周瑞忠
(土建系)

提 要

本文利用Fourier变换方法和Weber-Schafheitlin间断积分,求得裂纹尖端附近位移场精确解的封闭形式,从而改进了断裂力学中Williams复特征展开式级数解的主项位移场公式。

关键词: 断裂力学, 封闭形式

Williams复特征展开是断裂力学中的基本方法之一,利用这一方法所求得的位移场、应力场级数表达式的主项公式被广泛应用于各种教科书和各类文献。随着使用的广泛和深入,它们的一些缺陷也逐步暴露,用增加级数的项和阶次的方法来改善其精确度的尝试己为R. A. Smith所提出,但项数越多,计算越复杂,用计算机实现时累积的误差也越大,截断误差始终不可避免。这里尝试用Fourier变换方法和Weber-Schafheitlin间断积分,求得精确解。过程如下:

经Fourier变换, Airy应力函数表示的重调和方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) e^{i\xi x} dx = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right) \tilde{\varphi}(\xi, y) = 0$$
$$\tilde{\varphi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\xi x} dx$$

取其通解并考虑物理量的有界性之后,立即有

$$\tilde{\varphi}(\xi, y) = [A(\xi) + B(\xi)y] e^{-|\xi|y} \tag{1}$$

反演变换求出(平面应变下)

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{i(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\nu) \tilde{\varphi}''_{yy}(\xi, y) + \nu \xi^2 \tilde{\varphi}(\xi, y) \right] e^{-i\xi x} \frac{d\xi}{\xi} + \text{const. 1} \\ v(x, y) = \frac{(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\nu) \tilde{\varphi}''_{y'(\xi, y)} - (2-\nu) \xi \tilde{\varphi}'_{y'}(\xi, y) \right] e^{-i\xi x} \frac{d\xi}{\xi^2} + \text{const. 2} \end{cases} \tag{2}$$

平面应力按材料常数转换用:

$$\frac{\nu}{1+\nu} \longrightarrow \nu \qquad \frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} E \longrightarrow E$$

本文1987年2月10日收到。

对导数变换有:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\varphi}'_{y(\xi, y)} &= B_{(\xi)} e^{-|\xi|y} - [A_{(\xi)} + B_{(\xi)} y] e^{-|\xi|y} |\xi| \\
 &= e^{-|\xi|y} [-A_{(\xi)} |\xi| + B_{(\xi)} (1 - |\xi|y)] \\
 \widetilde{\varphi}''_{y(\xi, y)} &= e^{-|\xi|y} (-|\xi|) [-A_{(\xi)} |\xi| + B_{(\xi)} (1 - |\xi|y)] + e^{-|\xi|y} [-B_{(\xi)} |\xi|] \\
 &= -e^{-|\xi|y} |\xi| B_{(\xi)} (2 - |\xi|y) + A_{(\xi)} |\xi|^2 e^{-|\xi|y} \\
 \widetilde{\varphi}''_{y(\xi, y)} &= \{e^{-|\xi|y} |\xi| [B_{(\xi)} |\xi| (2 - |\xi|y)] + e^{-|\xi|y} B_{(\xi)} |\xi|^2\} + e^{-|\xi|y} (-|\xi|) \\
 &\quad A_{(\xi)} |\xi|^2 \\
 &= e^{-|\xi|y} B_{(\xi)} |\xi|^2 (3 - |\xi|y) - e^{-|\xi|y} A_{(\xi)} |\xi|^3
 \end{aligned} \tag{3}$$

代入(2)有:

$$\left\{ \begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{i(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\nu) [B_{(\xi)} |\xi| (|\xi|y - 2) + A_{(\xi)} |\xi|^2] \right. \\
 &\quad \left. + \nu \xi^2 [A_{(\xi)} + B_{(\xi)} y] \right\} \cdot e^{-|\xi|x - |\xi|y} \frac{d\xi}{\xi} + \text{const.1} \\
 &= \frac{i(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} [A_{(\xi)} \xi + B_{(\xi)} \xi^{-1} |\xi| (|\xi|y - 2)(1-\nu)] e^{-|\xi|x - |\xi|y} d\xi + \\
 &\quad + \text{const.1} \\
 v(x, y) &= \frac{(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\nu) [B_{(\xi)} |\xi|^2 (3 - |\xi|y) - A_{(\xi)} |\xi|^3 - (2-\nu)\xi^2] \right. \\
 &\quad \left. [-A_{(\xi)} |\xi| + B_{(\xi)} (1 - |\xi|y)] \right\} e^{-|\xi|x - |\xi|y} \frac{d\xi}{\xi^2} + \text{const.2}
 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

上式中常数值易由 ∞ 这边界条件知

$$\text{const.1} = \tau^{\infty} y/G$$

$$\text{const.2} = \tau^{\infty} x/G \text{ 当I型裂纹时 } \infty \text{ 远处}$$

$\tau^{\infty} = 0$, 则该两项常数均为零。

这样, 问题归结为求未知函数 $A_{(\xi)}$, $B_{(\xi)}$, 它们是由缝面力和位移的边界条件所决定。分两种情况:

(i) I型, $y=0$ 处

$$\begin{cases} \sigma_y = -P & \tau_{xy} = 0 & |x| \leq a \\ \tau_{xy} = 0 & v = 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\text{由 } \tau_{xy}(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi [-A_{(\xi)} |\xi| + B_{(\xi)} (1 - |\xi|y)] e^{-|\xi|x - |\xi|y} d\xi$$

$$\text{当 } y=0 \quad \tau_{xy} \equiv 0 \quad \text{则 } B_{(\xi)} = A_{(\xi)} |\xi|$$

其余边界条件成为:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 A_{(\xi)} e^{-|\xi|x} d\xi = +P & |x| \leq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} [|\xi| A_{(\xi)} + (1-2\nu) B_{(\xi)}] e^{-|\xi|x} d\xi = 0 & |x| > a \end{cases} \tag{5}$$

(ii) II型, $y=0$ 处

$$\begin{cases} \sigma_V=0 & \tau_{XY}=\tau & |x|\leq a \\ u=0 & \sigma_V=0 & |x|>a \end{cases}$$

$$\text{由 } \sigma_V(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 [A(\xi) + B(\xi)y] e^{-i\xi x - |\xi|y} d\xi$$

当 $y=0$ $\sigma_V=0$ 则 $A(\xi)=0$

其余边界条件成为:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi B(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \tau_0 & |x|\leq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = 0 & |x|>a \end{cases} \quad (6)$$

显然, 由于(5)中 $B(\xi) = A(\xi)|\xi|$, 则(5)、(6)具有完全类似的形式, 它们是同一类对偶积分方程组。这类方程早在1937年由Titchmarsh, E.C首次研究并给出了一个形式解, 但他没能得到解的存在条件和最终结果, Busbridge, I.W后来给出了更完善的证明, 但解的最终表达式是由Sheddon, Elliott和Lowengrub直到1969年才给出^{[1][2]}。动用这些结果, 针对我们现在所论的情形

I型, 由对称性假定 $A(\xi)$ 为偶函数, 施行余弦变换后方程成

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) \cos(\xi x) d\xi = P & |x|\leq a \\ \int_0^{\infty} \xi A(\xi) \cos(\xi x) d\xi = 0 & |x|>a \end{cases}$$

最终解得

$$\begin{cases} A(\xi) = \frac{\pi a P}{2} \xi^{-2} J_1(a\xi) \\ B(\xi) = \frac{\pi a P}{2} \xi^{-1} J_1(a\xi) \end{cases}$$

II型, 由反对称性假定 $B(\xi)$ 为奇函数, 施行正弦变换后方程成

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi B(\xi) \cos(\xi x) d\xi = \tau_0 & |x|\leq a \\ \int_0^{\infty} B(\xi) \cos(\xi x) d\xi = 0 & |x|>a \end{cases}$$

中式 $J_1(a\xi)$ 为整数阶Bessel函数。这后一对积分方程的解和前一对形式上完全相同, 只不过把其中的 P 改换成 τ_0 。

代回求位移有:

$$\text{I型} \begin{cases} u(x, y) = \frac{-(1+\nu)}{E} a P \int_0^{\infty} e^{-\xi y} (1-2\nu-\xi y) J_1(a\xi) \sin(\xi x) \frac{d\xi}{\xi} \\ v(x, y) = \frac{(1+\nu)}{E} a P \int_0^{\infty} e^{-\xi y} [2(1-\nu) + \xi y] J_1(a\xi) \cos(\xi x) \frac{d\xi}{\xi} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{II型} \begin{cases} u(x, y) = \frac{(1+\nu)}{E} a \tau_0 \int_0^{\infty} e^{-\xi y} [2(1-\nu) - \xi y] J_1(a\xi) \cos(\xi x) \frac{d\xi}{\xi} \\ v(x, y) = \frac{-(1+\nu)}{E} a \tau_0 \int_0^{\infty} e^{-\xi y} [1-2\nu + \xi y] J_1(a\xi) \sin(\xi x) \frac{d\xi}{\xi} \end{cases} \quad (8)$$

由Weber-schafheitli中断积分, 可得到下列各恒等式:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \xi e^{-r\xi} J_1(a\xi) d\xi = a(a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \int_0^\infty e^{-r\xi} J_1(a\xi) d\xi = \frac{1}{a} [1 - r(a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ \int_0^\infty \xi^{-1} e^{-r\xi} J_1(a\xi) d\xi = \frac{1}{a} [(a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} - r] \quad r > 0 \end{cases} \quad (9)$$

并由几何关系(图1) $Z = x + iy = re^{i\theta}$, $Z - a = r_1 e^{i\theta_1}$,

$Z + a = r_2 e^{i\theta_2}$

注意到因 $r > 0$ 下式中的 Z 应取负的单值分支

易得:

$$R_e \int_0^\infty \xi e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = R_e \left\{ -ai(r_1 r_2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}i(\theta_1 + \theta_2)} \right\} \quad \text{图1 几何关系}$$

$$= -a(r_1 r_2)^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$I_m \int_0^\infty \xi e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = I_m \left\{ -ai(r_1 r_2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}i(\theta_1 + \theta_2)} \right\}$$

$$= -a(r_1 r_2)^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$R_e \int_0^\infty e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = R_e \left\{ \frac{1}{a} - r(r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} e^{i(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right)$$

$$I_m \int_0^\infty e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \sin \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right)$$

$$R_e \int_0^\infty \xi^{-1} e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = R_e \left\{ -\frac{i}{a} \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}i(\theta_1 + \theta_2)} - r e^{i\theta} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - r \sin \theta \right]$$

$$I_m \int_0^\infty \xi^{-1} e^{iz\xi} J_1(a\xi) d\xi = -\frac{1}{a} \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - r \cos \theta \right]$$

(10)

最后解出:

I型:

$$u(x, y) = \frac{-(1+\nu)}{E} aP \left\{ (1-2\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} e^{-\xi y} J_1(a\xi) d\xi - y \int_0^\infty e^{-\xi y} J_1(a\xi) \sin(\xi x) \cdot d\xi \right\}$$

$$= \frac{-(1+\nu)}{E} aP \left\{ (1-2\nu) I_m \int_0^\infty \xi^{-1} J_1(a\xi) e^{i\xi z} d\xi - y I_m \int_0^\infty J_1(a\xi) e^{i\xi z} d\xi \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(1+\nu)}{E} aP \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{1}{a} \right) \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \cos \theta \right] - \right. \\
&\quad \left. - y \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \sin \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) \right\} \\
v(x, y) &= \frac{(1+\nu)}{E} aP \left\{ 2(1-\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} e^{-\xi y} J_1(a\xi) \cos(\xi x) d\xi + y \int_0^\infty J_1(a\xi) \cos(\xi x) \cdot d\xi \right\} \\
&= \frac{(1+\nu)}{E} aP \left\{ 2(1-\nu) R_e \int_0^\infty \xi^{-1} J_1(a\xi) e^{i\xi z} d\xi + y R_e \int_0^\infty J_1(a\xi) e^{i\xi z} d\xi \right\} \\
&= \frac{(1+\nu)}{E} aP \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{1}{a} \right) \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \sin \theta \right] + \right. \\
&\quad \left. + y \left[\frac{1}{a} - \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

I 型:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ 2(1-\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} e^{-\xi y} J_1(a\xi) \cos(\xi x) d\xi - y \int_0^\infty e^{-\xi y} J_1(a\xi) \right. \\
&\quad \left. \cos(\xi x) d\xi \right\} + \tau^\infty y/G \\
&= \frac{(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ 2(1-\nu) R_e \int_0^\infty \xi^{-1} e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi - y k_e \int_0^\infty e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi \right\} \\
&\quad + \tau^\infty y/G \\
&= \frac{(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ 2(1-\nu) \frac{1}{a} \cdot \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \sin \theta \right] \right. \\
&\quad \left. - y \left[\frac{1}{a} - \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) \right] \right\} + \tau^\infty y/G \\
v(x, y) &= \frac{-(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ (1-2\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} e^{-\xi y} J_1(a\xi) \sin(\xi x) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + y \int_0^\infty e^{-\xi y} J_1(a\xi) \sin(\xi x) d\xi \right\} + \tau^\infty x/G \\
&= \frac{-(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ (1-2\nu) I_m \int_0^\infty \xi^{-1} e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + y I_m \int_0^\infty e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi \right\} + \tau^\infty x/G \\
&= \frac{-(1+\nu)}{E} a\tau_0 \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{1}{a} \right) \left[(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \cos \theta \right] + \right. \\
&\quad \left. + y \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \sin \left(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) \right\} + \tau^\infty x/G
\end{aligned} \tag{12}$$

这里导出的(11)、(12)式即裂纹尖端附近位移场精确解的封闭形式, 一般教科书中常用的级数主项所得的公式在稍微远离裂纹的尖端部位, 主项场公式计算的结果将完全失真, 算例表明在一倍裂缝长远处, 这种失真将严重到38.7%, 而这里给出的精确解公式仍然有效, 这就给实用上带来较大的方便。

特殊地，有必要对 $y=0$ 的情形作一些讨论。由本文封闭解表达式易得，

$$\begin{cases} u(x, 0) = -\frac{(1+\nu)}{E} a P (1-2\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} J_1(a\xi) \sin(\xi x) d\xi \\ \quad = -\frac{(1+\nu)}{E} a P (1-2\nu) \begin{cases} x/a & |x| \leq a \\ \frac{1}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) & |x| > a \end{cases} \\ v(x, 0) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} P \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \end{cases}$$

(I型)

(13)

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tau_0 \begin{cases} 0 & |x| > a \\ \sqrt{a^2 - x^2} & |x| \leq a \end{cases} \\ v(x, 0) = \frac{-(1+\nu)}{E} a \tau_0 (1-2\nu) \int_0^\infty \xi^{-1} J_1(a\xi) \sin(\xi x) d\xi + \tau_0 x/G \\ \quad = \frac{-(1+\nu)}{E} a \tau_0 (1-2\nu) \begin{cases} \frac{1}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) & |x| > a \\ x/a & |x| \leq a \end{cases} \end{cases}$$

(14)

这说明即使是在纯 I 型裂纹情况下，裂纹面上除裂纹中心点之外，均存在 x 方向的位移，缝面各点在受拉张开的同时，也向内侧中心点方向移动。换句话说，在不超过断裂韧度范围内，外加的能量将首先改变裂缝的形状。同样地，在纯剪 (II 型) 情况下，这一结论也是完全正确的。作为精确解公式的应用，曾用以校验某些有限元计算网格的精度。

例：对有限尺寸中心裂纹板试样，承受对边均匀拉边 $q=100\text{kg/cm}$ ，用八节点等参有限元 (裂纹端点附近用奇异元) 共 240 个单元，806 个节点，解方程采用双精度标准 Grout 分解，在 IBM-PC 微机进行计算求得 A、B 两点的位移。

按本文提供的精确解公式，计算步骤如下：

1. 考虑有限尺寸的影响系数

$$\text{由 } \frac{B}{H} = 0.625 \quad \text{及} \quad \frac{2a}{B} = 0.4^{[3]} \text{ 知影响系数}$$

$$F(t) = 1.122$$

2. 各项常数计算。

3. 由精确解公式求得的 A, B 位移及比较见表一。

计算结果表明，这一有限元网络的计算误差约在 1—3.29% 左右。

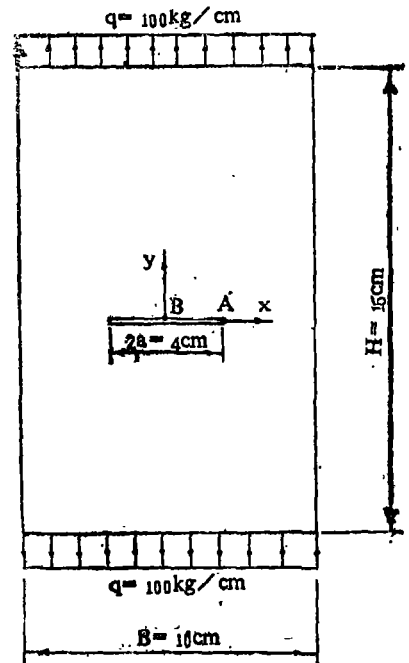


图2 计算实例

表一 理论解结果与有限元精度比较表

项目	点号 位移	A				B			
		U(cm)	误差	V(cm)	误差	U(cm)	误差	V(cm)	误差
有限元		-0.9616×10^{-3}	99.25%	0.00		0.00		2.5034×10^{-3}	103.29%
理论解		-0.9689×10^{-3}	100%	0.00	100%	0.00	100%	2.4237×10^{-3}	100%

参 考 文 献

- [1] Sneddon, I. N, Lowengrub M. Crack Problems in the classical theory of Elasticity(1969).
- [2] Sneddon I. N., Elliott. H.A., Quart. Appl. Math, 4 P. 229(1946).
- [3] Isida M., Int. J. Frac. Mech, vol. T, No3, PP. 301-316(1971).
- [4] 范天佑, 断裂力学基础, 江苏科学技术出版社, (1978)。
- [5] 周瑞忠, 刘光延, 福州大学学报, (2), 89(1986)。

The Closed form of Exact Solutions for
the Displacement near the Tops of Cracks

Zhou Ruizhong

(Department of Civil and Architectural Engineering)

Abstract

Given in this paper are formulas of the closed form for the exact solution to the displacements near the tops of the cracks by means of Fourier Transform and Weber-Schafheitlin integral. Thus, they will improve the results of the displacement in fracture mechanics by the first term of Williams expansion.

Keywords: fracture mechanics, closed form