一九八八年　　　　福 州 大 学 学 报　　　　№2
第 二 期　　JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY　　1988

多输入多输出系统结构辨识

张 志 涌

（自动化所）

提　　　　要

理论分析及仿真结果表明，在以往残差技术基础上引入了白化滤波器可大大改善辨识多输入多输出系统结构的可靠性及准确性。

关键词：系统辨识，多变量系统

一、引　　言

多变量线性系统的辨识有两个主要问题：结构确定和参数估计。已提出了解决这些问题的许多方法[1-6]，它们共同的基础是投影残差分析技术。在强度不大的白噪声情况下，它们可以给出满意的结果。但在较强的有色噪声作用下，所估计的结构指数往往比实际系统高，从而不可靠。其原因在于残差与输出观测量相关。本文对此提出了构成简单的自回归白化滤波器，以获得白化残差，然后据白化残差向量长度随结构变化曲线确定结构不变子。理论分析及仿真结果表明，本文所提方法是有效、可靠的。

二、问题的提法

对于完全可观的线性多变量离散系统，在结构不变子已知的情况下，通过适当安排输出分量的次序，总可以表达成非平凡参数最少的VDE标准型：[2]

$$y(t)=A(q^{-1})y(t)+B(q^{-1})u(t) \tag{1}$$

其中$y(\cdot)\in R^m$，$u(\cdot)\in R^r$；$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_m$；

$$A(q^{-1})=A^{(1)}q^{-1}+\cdots+A^{(\nu_m)}q^{-\nu_m};\quad B(q^{-1})=B^{(1)}q^{-1}+\cdots+B^{(\nu_m)}q^{-\nu_m};$$

$\left\{A^{(1)},\cdots,A^{(\nu_m)}\right\}$及$\left\{B^{(1)},\cdots,B^{(\nu_m)}\right\}$的第$i$行分别有$\nu_i$个非平凡行。

相应于式(1)的第i输出分量表达为

$$y_i(t)=A_i(q^{-1})y(t)+B_i(q^{-1})u(t) \tag{2}$$

式中$A_i(q^{-1})=\Big[\sum\limits_{j=\nu_1-1}^{0}a_{i1j}q^{j-\nu_i}\cdots\sum\limits_{j=\nu_{i-1}-1}^{0}a_{i(i-1)j}q^{j-\nu_i}\ \sum\limits_{j=\nu_i-1}^{0}a_{iij}q^{j-\nu_i}\cdots$

本文1987年2月12日收到。

$$\sum_{j=\nu_i-1}^{0} a_{imj} q^{j-\nu_i}\Big]$$

$$B_i(q^{-1})=\Big[\sum_{j=\nu_i-1}^{0} b_{i1j}q^{j-\nu_i}\cdots\sum_{j=\nu_i-1}^{0} b_{irj}q^{j-\nu_i}\Big]$$

参数a，b构成了第i子系统被参数化的最大独立参数组。

注意$A_i(q^{-1})$向量中的前$(i-1)$个分量的Σ求和下限分别取决于ν_1，…，ν_{i-1}。这是在$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_m$的条件下获得的。在辨识结构时，由于$\nu_1$，$\nu_2$，…，$\nu_m$的相对大小关系也未知，故因一般地写

$$A_i(q^{-1})=\Big[\sum_{j=(\nu_i-1)}^{0} a_{i1j}q^{j-\nu_i}\cdots\sum_{j(\nu_i-1)}^{0} a_{imj}q^{j-\nu_i}\Big]$$

值得指出的是，由$A_i(q^{-1})$的这种变化，使表达式(2)中可能包含有非独立参数[注]。

假若有一组无噪声干扰的输入输出数据，则据式(2)可得

$$Y_i(t)=\Phi(\nu_i)\theta \tag{3}$$

其中$\Phi(\nu_i)=\Big[Y_1(t-1)\cdots Y_m(t-1)U_1(t-1)\cdots U_r(t-1)\vdots\cdots\cdots\vdots Y_1(t-\nu_i)\cdots Y_m(t-\nu_i)$

$U_1(t-\nu_i)\cdots U_r(t-\nu_i)]$；

$$\theta=\Big[a_{i1(\nu_i-1)}\cdots a_{im(\nu_i-1)}\ b_{i1(\nu_i-1)}\cdots b_{ir(\nu_i-1)}\vdots\cdots\cdots\vdots a_{i10}\cdots a_{im0}b_{i10}\cdots b_{ir0}\Big]^T;$$

$Y_i(t-j)=[y_i(t-j)y_i(t-j+1)\cdots y_i(t-j+l-1)]^T$，$(i=1,\cdots,m,j=0,\cdots,\nu_i)$；

$U_i(t-j)=[u_i(t-j)u_i(t-j+1)\cdots u_i(t-j+l-1)]^T$，$(i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,\nu_i)$。

当式(2)中包含有非独立参数时，信息矩阵$\Phi(\nu_i)$将不是满列秩的。也就是说，$\Phi(\nu_i)$的列向量是线性相关的。

如果输出观测受噪声$v(t)$干扰，有

$$\tilde{y}(t)=y(t)+v(t) \tag{4}$$

那末据式(2)可得到

$$\tilde{y}_i(t)=A_i(q^{-1})\tilde{y}(t)+B_i(q^{-1})u(t)+\varepsilon_i(t), \tag{5}$$

$$\varepsilon_i(t)=v_i(t)-A_i(q^{-1})v(t)。 \tag{6}$$

由输入输出观测数据可得

$$\tilde{Y}_i(t)=\tilde{\Phi}(\nu_i)\theta+\Sigma_i(t) \tag{7}$$

其中 $\tilde{\Phi}(\nu_i)=\Big[\tilde{Y}_1(t-1)\cdots\tilde{Y}_m(t-1)U_1(t-1)\cdots U_r(t-1)\vdots\cdots\cdots\vdots\tilde{Y}_1(t-\nu_i)\cdots\tilde{Y}_m(t-\nu_i)$

$U_1(t-\nu_i)\cdots U_r(t-\nu_i)]$；

$\tilde{Y}_i(t-j)=\Big[\tilde{y}_i(t-j)\tilde{y}_i(t-j+1)\cdots\tilde{y}_i(t-j+l-1)\Big]^T$，$(i=1,\cdots,m,j=0,\cdots,\nu_i)$；

[注] 这种过参数化，会使得参数递推估计算法中的Hessian变得病态或奇异。因此辨识结构时采用参数递推估计穷试法是不可靠的[7]。

$$\Sigma_i(t)=[\varepsilon_i(t)\varepsilon_i(t+1)\cdots\varepsilon_i(t+l-1)]^T$$
$$=V_i(t)-[V_1(t-1)\cdots V_m(t-1)\vdots\cdots\cdots\vdots V_1(t-\nu_i)\cdots V_m(t-\nu_i)]\theta_a;$$
$$\theta_a=\left[a_{i1(\nu_i-1)}\cdots a_{im(\nu_i-1)}\vdots\cdots\cdots\vdots a_{i10}\cdots a_{im0}\right];$$
$$V_i(t-j)=[v_i(t-j)v_i(t-j+1)\cdots\cdots v_i(t-j+l-1)],\ (i=1,\cdots,m,j=0,\cdots,\nu_i)。$$

因为 $R_{y_j\varepsilon_i}(\tau)=E\left\{\widetilde{y}_j(t-\tau)\varepsilon_i(t)\right\}$在$v(\cdot)$和$u(\cdot)$不相关的假设下可写为

$$R_{y_j\varepsilon_i}(\tau)=E\{v_j(t-\tau)\cdot[v_i(t)-A_i(q^{-1})v(t)]\}$$
$$=E\left\{v_j(t-\tau)\cdot\left[v_i(t)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=0}^{\nu_i-1}a_{ipk}v_p(t+k-\nu_i)\right]\right\}$$
$$=R_{v_ji}(\tau)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=0}^{\nu_i-1}a_{ipk}Rv_{jp}(\tau+k-\nu_i) \tag{8}$$

一般地说，对于$\tau=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ R_{y_j\varepsilon_i}(\tau)$不可能全为0。也就是说，一般

$$\left[\widetilde{Y}_i(t-\tau)\right]^T\Sigma_i(t)\neq0,\ (j=1,\cdots,\ m,\tau=1,2,\cdots)。$$

我们的目的是在对噪声性质缺乏先验知识的情况下，不通过参数估计，直接从输入数据及受噪声污染的输出观测数据中确定VDE标准型式(1)的结构不变子$\{\nu_1,\cdots,\nu_m\}$。

三、确定结构的残差分析技术

令$S(n)=\mathrm{Span}\left\{\widetilde{\Phi}(n)\right\}$是$l$维空间的一个子空间。在此

$$\widetilde{\Phi}(n)=\left[\widetilde{Y}_1(t-1)\cdots\widetilde{Y}_m(t-1)U_1(t-1)\cdots U_r(t-1)\vdots\cdots\cdots\vdots\widetilde{Y}_1(t-n)\cdots\widetilde{Y}_m(t-n)\right.$$
$$\left.U_1(t-n)\cdots U_r(t-n)\right],$$

l与观测数据长度有关，且$l\gg(m+r)\cdot max\{\nu_1,\ \cdots,\ \nu_m\}$。

又令M是向$S(n)$正交补空间的投影算子。那末$M\widetilde{Y}_i(t)$就是残差。Guidorz i把它称为值误差[5]。根据$\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2$随$n$变化的曲线，选定曲线成为几乎水平直线的最小$n$值作为结构指数估计值$\hat{\nu}_i$。这就是Suen，El-sherief确定结构的残差分析技术[4、5]。Guidorzi确定结构的值误差法与此没实质性区别。下面分三种情况讨论$\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2$与$n$的关系。

1. $n=\nu_i$

把式(7)改写为

$$[\widetilde{Y}_i(t)-\Sigma_i(t)]=\widetilde{\Phi}(\nu_i)\theta,$$

可以看出向量$[\widetilde{Y}_i(t)-\Sigma_i(t)]$是由信息矩阵$\widetilde{\Phi}(\nu_i)$的列向量线性组合而成，或说它在$S(\nu_i)=\mathrm{span}\{\widetilde{\Phi}(\nu_i)\}$空间内。若用$M_\nu$具体地记$S(\nu_i)$补空间的投影算子，那末

$$M_v[\widetilde{Y}_i(t)-\Sigma_i(t)]=0,$$

即 $$M_v\widetilde{Y}_i(t)=M_v\Sigma_i(t)。\tag{9}$$

因此 $$\|M_v\widetilde{Y}_i(t)\|^2=\|M_v\Sigma_i(t)\|^2。\tag{10}$$

2. $n<\nu_i$

记$\widetilde{\Phi}(\nu_i)=[\widetilde{\Phi}(n)\vdots\widetilde{\Phi}]$，$\bar{S}=\mathrm{span}\{M\widetilde{\Phi}\}$，那末$S(\nu_i)$可分解为$S(\nu_i)=S(n)\oplus\bar{S}$。

又若用P表示$\bar{S}$的投影算子，则

$$M=M_v+P,$$

$$M\widetilde{Y}_i(t)=M_v\widetilde{Y}_i(t)+P\widetilde{Y}_i(t)。$$

据正交性及幂等性可得

$$\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2=\|M_v\widetilde{Y}_i(t)\|^2+\|P\widetilde{Y}_i(t)\|^2$$

$$=\|M_v\Sigma_i(t)\|^2+\|P\widetilde{Y}_i(t)\|^2。\tag{11}$$

当输入采用白噪声或PRBS时，由结构性质可知$\|PY_i(t)\|^2$比$\|M_v\Sigma_i(t)\|^2$大得多[6]。并因此

$$\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2\gg\|M_v\Sigma_i(t)\|^2。\tag{12}$$

3. $n>\nu_i$

记$\widetilde{\Phi}(n)=[\widetilde{\Phi}(\nu_i)\vdots\overline{\Phi}]$，$\bar{S}=\mathrm{span}\{M_v\overline{\Phi}\}$，$P$是$\bar{S}$的投影算子，那末有

$$S(n)=S(\nu_i)\oplus\bar{S},\tag{13}$$

$$M_v=M+P。\tag{14}$$

据式(7)及式(13)，式(14)可得

$$M\widetilde{Y}_i(t)=M\Sigma_i(t)=M_v\Sigma_i(t)-P\Sigma_i(t)。$$

同样据正交性及幂等性可知

$$\|M_v\widetilde{Y}_i(t)\|^2-\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2=\|P\Sigma_i(t)\|^2。$$

由式(8)可知，$\|P\Sigma_i(t)\|^2>0$。文[4]也说明了这一点。当噪声$v(t)$相关性较强，即$Rv_{j}(\tau)$ $(j=1,\cdots,m)$在$\tau>\nu_i$也有较大数值时。$\|P\Sigma_i(t)\|^2$会有较大的值。这一方面说明了$n>\nu_i$时，对$\varepsilon_i(t)$方程误差的滤波作用。另方面也使得$\|M\widetilde{Y}_i(t)\|^2$随$n$变化的曲线有时在$n\geqslant\nu_i$后不是平直的。从而使残差分析技术确定结构指数往往大于真实的ν_i。文[5][6]的仿真实例都表明了这个事实。

四、确定结构的白化残差分析技术

由上节可知，方程噪声

$$\varepsilon(t)=\widetilde{A}(q^{-1})v(t)\tag{15}$$

在此$\widetilde{A}(q^{-1})=I-A(q^{-1})$。$v(t)$是具有理谱密度的观察噪声，可一般地用ARMA表示如下

$$v(t)=C(q^{-1})D^{-1}(q^{-1})e(t)\tag{16}$$

式中 $C(q^{-1})=diag\{C_i(q^{-1})\}$；$D(q^{-1})=diag\{D_i(q^{-1})\}$；

$$C_i(q^{-1})=1+C_{i1}q^{-1}+\cdots+C_{inci}q^{-n_{ci}} \qquad (i=1,\cdots,m);$$

$$D_i(q^{-1})=1+d_{i1}q^{-1}+\cdots+d_{indi}q^{-n_{di}} \qquad (i=1,\cdots,m);$$

$e(t)$是各分量彼此不相关的白噪声，且$e(\cdot)$与$u(\cdot)$不相关。

把式(16)代入式(15)可得

$$\varepsilon(t)=\widetilde{A}(q^{-1})C(q^{-1})D^{-1}(q^{-1})e(t) \tag{17}$$

由式(16)，式(17)及有关$e(t)$的假设，很容易证明

$$R_{ve}(\tau)=E\{v(t-\tau)e^T(t)\}=0 \qquad (\tau\neq 0),$$

$$R_{\varepsilon e}(\tau)=E\{\varepsilon(t-\tau)e^T(t)\}=0 \qquad (\tau\neq 0),$$

$$R_{ye}(\tau)=E\{y(t-\tau)e^T(t)\}=0 \qquad (\tau\neq 0)。$$

这意味着向量

$E_i(t)=[e_i(t)e_i(t+1)\cdots\cdots e_i(t+l-1)]$，$i=1,\cdots,m$，总正交于$\widetilde{Y}_j(t-\tau)$，$\Sigma_j(t-\tau)$'

$(j=1,\cdots,m,\tau=1,2,\cdots)$。即向量$E_i(t)$总在由$\widetilde{Y}_j(t-\tau)$或$\Sigma_j(t-\tau)$，$(j=1,\cdots,m,\ \tau=1,2,\cdots)$所张空间的补空间中。这性质很重要，它是形成白化残差分析技术的基础。

假设被辨识系统渐近稳定，$C_i(z^{-1})$的全部零点在单位园外，那末由式(17)可得

$$G(q^{-1})\varepsilon(t)=e(t)$$

它的第i个分量为

$$\Sigma_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{n_c}g_{ij\tau}\varepsilon_j(t-\tau)+e_i(t) \tag{18}$$

由序列数据组成相应的向量方程为

$$\Sigma_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{n_c}g_{ij\tau}\Sigma_j(t-\tau)+E_i(t)$$

在$S(n)=\mathrm{span}\{\widetilde{\Phi}(n)\}$补投影算子$M$的作用下，有

$$M\Sigma_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{n_c}g_{ij\tau}M\Sigma_j(t-\tau)+ME_i(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{n_c}g_{ij\tau}M\Sigma_j(t-\tau)+E_i(t)$$

若记M_e为$\mathrm{span}\{M\Sigma_j(t-\tau),j=1,\cdots,m,\ \tau=1,\cdots,n_c\}$的补投影算子，则可进一步得

$$M_e[M\Sigma_i(t)]=M_eE_i(t)=E_i(t) \tag{19}$$

据此，可形成确定结构的白化残差技术如下：

(1) 利用输入输出观测数据$u(\cdot)$，$\widetilde{y}(\cdot)$，构成向量$\widetilde{Y}_i(t)(i=1,\cdots)$及信息矩阵$\widetilde{\Phi}(n)$。

(2) 利用$\widetilde{\Phi}(n)$构成$S(n)=\mathrm{span}\{\widetilde{\Phi}(n)\}$的补空间投影算子，并通过它获得残差向量$R_i(t)=M\widetilde{Y}_i(t)$，$(i=1,\cdots,m)$。

(3) 由残差向量$R_i(t)$，$(i=1,\cdots,m)$，通过简单的移位可得$R_i(t-\tau)$，$(i=1,\cdots,m,$

$\tau=1,\cdots,n_e$)。并由这些移位残差向量构成自回归阵Φ_R

$$\Phi_R=[R_1(t-1)\cdots R_m(t-1)\vdots\cdots\cdots\vdots R_1(t-n_e)\cdots R_m(t-n_e)]。$$

(4) 利用Φ_R构成$S_R=\mathrm{span}\{\Phi_R\}$的补空间投影算子$M_R$，并通过它获得所谓白化残差

$$W_i(t)=M_RR_i(t)=M_R[M\widetilde{Y}_i(t)] \tag{20}$$

(5) 计算$\hat{\sigma}_i=\|W_i(t)\|/\sqrt{l}$，并画$\hat{\sigma}_i$随$n$变化的曲线$\hat{\sigma}_i(n)$。

由于白化滤波作用，在$n\geqslant\nu_i$时，$W_i(t)=E_i(t)$

因此，$\hat{\sigma}_i(n)$在$n\geqslant\nu_i$后几乎呈水平线。转折点处的n值取为结构指数估计值$\hat{\nu}_i$。而此时$\hat{\sigma}_i(n)$值也给出了$e_i(t)$标准差的估计值。

至于投影算子M，可以用伪逆$\widetilde{\Phi}^+(n)$构成如下

$$M=I-\widetilde{\Phi}(n)\widetilde{\Phi}^+(n)$$

也可以用Schmidt正交法递推形成如下

$$P_k=\frac{\bar{\varphi}_k\bar{\varphi}_k^T}{\bar{\varphi}_k^T\bar{\varphi}_k}$$

$$M_k=M_{k-1}-P_k \qquad k=1,\cdots,n(m+r)$$

$$\bar{\varphi}_{k+1}=M_k\bar{\varphi}_k$$

且$\bar{\varphi}_1=\varphi_1$，$M_0=I$。其中$\varphi_k$是$\widetilde{\Phi}(n)$阵的第$k$个列向量。考虑到可能发生过参数，还要在递推中设置一个机器零阈值ξ，当$\bar{\varphi}_k^T\bar{\varphi}_k\leqslant\xi$时，跳过此向量。

白化投影算子M_R也同样可用以上方法求取。值得指出，白化滤波器的阶数n_e的选取与噪声特性关系密切。试验表明，在相当多的场合下，n_e取1或2便可。当然，n_e愈大，滤波效果也愈好，但是计算代价也愈大。

本文的方法经仿真表明是有效的，但限于篇幅，仿真算例没有列出。

参 考 文 献

(1) Hajdasinski, A.K., Linear Multivariable Systems, ISBN 90-6144-106-4, (1980).

(2) Bokor, J.and Keviczky, L., Int.J.Control, 461-475, 36(1982).

(3) Guidorzi, R.P., Automatica, 361-374, 11(1975).

(4) Suen, L.C. and Liu, R. , IEEE Trans Automat. Control, 458—464, AC-23 (1978).

(5) Guidorzi, R.P., Losito, M.P.and Muratori,T., IEEE Trans.Automat.Control, 1044-1053, AC-27(1982).

(6) El—Sherief, H.and Sinha, N.K., IEEE Trans.Systems, man and Cyb., 668—673, SMC-12(1982).

(7) Ljung, L.and Soderstrom, T., ISBN 0—262—12095—x. (1983).

The structure Identificatin of MIMO System

Zhang Zhiyong
(Tne Institute of Automation)

Abstract

Theoretical analyses and results of simulation show that the reliablity and accuracy of the structuer identification of MIMO systems can be very much improved by incorporating a whitening filter on the basis of the previous residual error technique.

Keywords: identification, multivariable system