

完全电磁相互作用等离子体的电子 密度涨落和激光散射结构因子

陈 虹 陆全康

(复旦大学 物理系)

提 要

本文在考虑粒子间完全电磁相互作用的基础上, 采用试探粒子模型, 致力于考察只计及粒子间库仑相互作用的合理性及其条件, 并就一些具体情况, 给出了电磁相互作用对散射频谱的定量修正。

关键词: 电磁相互作用, 试探粒子, 散射频谱

一、引 言

自从六十年代初期以来, 电磁辐射在等离子体中散射的问题已经作了广泛的研究^[1-7]。但是由于理论处理上的困难, 除了一般性地指出电磁相互作用应小于库仑相互作用外, 并没有文献证明略去电磁相互作用的合理性, 也没有给出电磁相互作用和静电相互作用对散射频谱的贡献在定理上的比较。

本文结合文献[6], 把优拉索夫一试探粒子模型推广到完全电磁相互作用体系, 探讨完全电磁相互作用对等离子体中电子密度涨落和散射结构因子的影响。

本文采用的基本方程是

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} \left(\vec{E} + \frac{1}{C} \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_a n_{a0} q_a \int f_a d\vec{v} + 4\pi q_T \delta(\vec{x} - \vec{x}_T) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\Delta \times \vec{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{C} \sum_a n_{a0} q_a \int \vec{v} f_a d\vec{v} + \frac{4\pi}{C} v_T q_T \delta(\vec{x} - \vec{x}_T). \quad (4)$$

其中, $f_a = f_a(\vec{x}, \vec{v}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T)$ 是组成等离子体的第 2 种粒子的分布函数。 q_a, m_a, n_{a0} 分别为第 2 种粒子的电量、质量和平均粒子数密度。 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T)$ 和 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T)$

为等离子体中的电磁场。 q_T 、 \vec{x}_T 和 \vec{v}_T 表示试探粒子的电量、位置和速度。

在试探粒子模型中，先把等离子体中的任一粒子视为试探粒子，考虑其他粒子(场粒子)对它的作用，并把这种作用等效为场粒子对试探粒子的“穿衣效应”然后再把等离子体视为由这种“穿衣”粒子的集合，并假设这个集合服从恒定态或平衡态分布。可以证明，在准确到数量级 $g (=1/n\lambda_D^3, n$ 为粒子数密度， λ_D 为德拜长度)的近似下，方程(1)–(4)包含了由严格的动力学理论所能得出的一切有关涨落、关联等信息。

与文献[6]的基本方程相比较，这里用麦克斯韦方程组取代了泊松方程，这意味着用带电粒子间的完全电磁相互作用取代了静电相互作用。下面就不同的恒定态或平衡态分布，讨论电磁相互作用对电子密度涨落和散射频谱的影响。

二、各向同性麦克斯韦分布

在此情况下，试探粒子 $q_T\delta(\vec{x}-\vec{x}_T)$ 所产生的微扰效应可分析如下，令

$$f_a(\vec{x}, \vec{v}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T) = f_{a0}(\vec{v}) + f_{aT}(\vec{x}, \vec{v}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T), \quad (5)$$

其中， $f_{a0} = \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m_a v^2}{2K_B T}\right\}$ 为平衡态麦克斯韦分布， T 为等离子体温度，

K_B 为玻尔兹曼常数， $f_{aT}(\vec{x}, \vec{v}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T)$ 为由试探电荷 q_T 引起的微扰分布函数。

在 g 级近似下，试探粒子作未扰动的直线运动： $\vec{x}_T = \vec{x}_{T0} + \vec{v}_T t$ 。(1)–(5)式经线性化后，采用付里叶–拉普拉斯变换方法，得到试探粒子 q_T 在双组份等离子体中引起的电子密度涨落为

$$\begin{aligned} \vec{n}_{eT}(\vec{x}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T) &= \delta_{eT} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{T0} - \vec{v}_T t) + \\ &+ \frac{q_T}{(-e)} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{T0} - \vec{v}_T t)\} \cdot \frac{G_e}{1 - G_e - G_i} \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$G_a \equiv G_a(\vec{k}, P) \Big|_{P = -i\vec{k} \cdot \vec{v}_T} = \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \frac{i\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{v}}}{P + i\vec{k} \cdot \vec{v}} d\vec{v} \Big|_{P = -i\vec{k} \cdot \vec{v}_T}, \quad (a=e, i) \quad (7)$$

$$\delta_{ee} = 1, \quad \delta_{ei} = 0, \quad \omega_{pa}^2 = \frac{4\pi n_{a0} q_a^2}{m_a} \quad (8)$$

(6)式中的第一项表示试探粒子本身对电子密度的贡献，第二项表示试探粒子的“穿衣效应”，即屏蔽云。

散射频谱与电子密度涨落间的关系^[8,9]

$$S(\vec{k}, \omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{(2\pi)^8}{TV} \langle |\vec{n}_e(\vec{k}, \omega)|^2 \rangle \quad (9)$$

其中, T 、 V 分别为关联时间、体系的体积, $\langle \dots \rangle$ 表示系综平均, 在试探粒子模型中, 系综平均即对平衡态分布求均。由(6)–(9)式可计算出散射结构因子

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{2\pi}{k} F_{i,0}\left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \left| 1 + \frac{G_i(\vec{k}, -i\omega)}{1 - G_e(\vec{k}, -i\omega) - G_i(\vec{k}, -i\omega)} \right|^2 + \frac{2\pi}{k} F_{e,0}\left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \left| \frac{G_e(\vec{k}, -i\omega)}{1 - G_e(\vec{k}, -i\omega) - G_i(\vec{k}, -i\omega)} \right|^2 \quad (10)$$

其中, $F_{\alpha 0}\left(\frac{\omega}{k}\right) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{m_\alpha}{2K_B T}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right\}$, ($\alpha = e, i$), 这与文献片[8]的结果一致。

(10)式表明, 在平衡态分布为各向同性的麦克斯韦分布的均匀无外场等离子体中, 电磁相互作用对散射频谱无影响。

三、各向异性平衡态分布 (I)

在这一节将讨论在背景等离子体中存在一束流的情况, 考察分布函数为各向异性时, 电磁相互作用对散射频谱的影响, 取恒定态分布函数(图 1 所示)为

$$f_{a0} = f_{ab}(\vec{v}) + f_{aa}(\vec{v}) \quad (11)$$

式中

$$f_{aa}(\vec{v}) = \frac{n_{aa}}{n_{a0}} \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m_a v^2}{2K_B T}\right\}$$

$$f_{ab}(\vec{v}) = \frac{n_{ab}}{n_{a0}} \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m_a(\vec{v} - \vec{u})^2}{2K_B T}\right\}$$

$$n_{a0} = n_{aa} + n_{ab}, \quad \sum_a n_{ab} q_a = 0,$$

n_{aa} 、 n_{ab} 分别表示第 2 种粒子的背景密度和束密度。

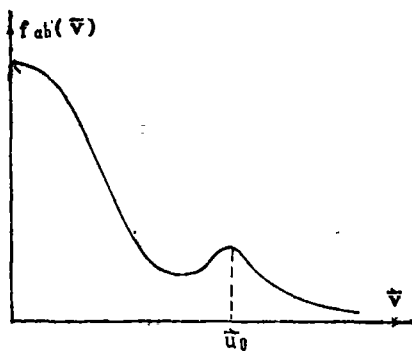


图 1

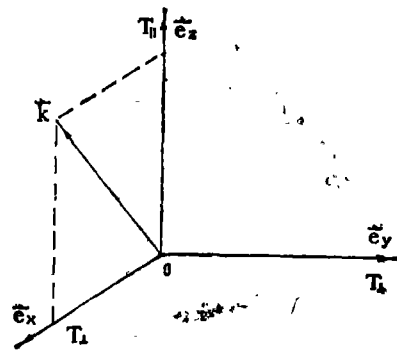


图 2

从基本方程(1)–(4)出发, 采用前一节的方法, 选取图 2 所示的坐标系, 可以得到试探粒子 $q_T \delta(\vec{x} - \vec{x}_{T0} - \vec{v} t)$ 引起的电子密度涨落

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{eT}(\vec{x}, t | \vec{x}_T, \vec{v}_T) = & \delta_{eT} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{T0} - \vec{v}_T t) + \\ & + \frac{q_T}{(-e)} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp P \left\{ i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{T0} - \vec{v}_T t) \right\} \\ & \cdot \left[P_e(\vec{k}, -i\vec{k} \cdot \vec{v}_T) - \left(\frac{v_{Tx} u_{0x}}{C^2} \right) \Phi_e(\vec{k}, -i\vec{k} \cdot \vec{v}_T) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} P_e(\vec{k}, p) = & \frac{1}{R(\vec{k}, p)} \left\{ \left[\Delta_{ea}(\vec{k}, p) + \Delta_{eb}(\vec{k}, p) \right] \Lambda^+(\vec{k}, p) + \Delta_{ea}(\vec{k}, p) \Delta_b(\vec{k}, p) \right. \\ & \left. \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 k^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e(\vec{k}, p) = & \frac{k^2}{R(\vec{k}, p)} \left\{ \left[\Delta_{ea}(\vec{k}, p) + \Delta_{eb}(\vec{k}, p) \right] \Delta_b(\vec{k}, p) + \Delta_{eb}(\vec{k}, p) D^+(\vec{k}, \right. \\ & \left. p) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} R_e(\vec{k}, p) = & \left[\Lambda^+(\vec{k}, p) + \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 k^2 \Delta_b(\vec{k}, p) \right] D^+(\vec{k}, p) + \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 k^2 \\ & \cdot \Delta_b^2(\vec{k}, p) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{aa} = & \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \frac{ikF'_{aa}(u)}{p+iku} du, & \varepsilon_{aa} = & \frac{\omega_{pa}^2}{p} \int \frac{F_{aa}(u) du}{p+iku} du, \\ \Delta_{ab} = & \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \frac{ikF'_{ab}(u)}{p+iku+iku_{0z}} du, & \varepsilon_{ab} = & \frac{\omega_{pa}^2}{p} \int \frac{F_{ab}(u)}{p+iku+iku_{0z}} du, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta_a = \sum_a \Delta_{aa}, \quad \Delta_b = \sum_a \Delta_{ab}, \quad \varepsilon_a = \sum_a \varepsilon_{aa}, \quad \varepsilon_b = \sum_a \varepsilon_{ab}; \quad (17)$$

$$\Lambda^+(\vec{k}, p) = \frac{p^2}{C^2} + k^2 + \frac{p^2}{C^2} \varepsilon_a + \frac{p^2}{C^2} \varepsilon_b \left(1 + \frac{iku_{0z}}{p} \right), \quad (18)$$

$$D^+(k, p) = 1 - \Delta_a - \Delta_b \quad (19)$$

$$F_{aa}(u) = \int \delta\left(u - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{k}\right) f_{aa}(\vec{v}) d\vec{v},$$

$$F_{ab}(u) = \int \delta\left(u - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{k}\right) f_{ab}(\vec{v}) d\vec{v}, \quad (20)$$

其中 $R(\vec{k}, p)$ 为有束流存在时的电磁波色散函数。

根据(9)式, 最后得散射结构因子频谱

$$\begin{aligned}
S(\vec{k}, \omega) = & \frac{2\pi}{k} F_{a_0}(\frac{\omega}{k}) \left\{ \left| 1 + P_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 + \left(\frac{K_B T}{m_e C^2} \right) \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \left| \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 \right\} \\
& + \frac{2\pi}{k} F_{e_0}(\frac{\omega}{k} - u_{0z}) \left\{ \left| 1 + p_e(\vec{k}, -i\omega) - \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 + \left(\frac{K_B T}{m_e C^2} \right) \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \left| \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 \right\} \\
& + \frac{2\pi}{k} F_{i_0}(\frac{\omega}{k}) \left\{ \left| p_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 + \left(\frac{K_B T}{m_e C^2} \right) \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \left| \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 \right\} \\
& + \frac{2\pi}{k} F_{b_0}(\frac{\omega}{k} - u_{0z}) \left\{ \left| p_e(\vec{k}, -i\omega) - \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 + \left(\frac{K_B T}{m_e C^2} \right) \left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2 \left| \Phi_e(\vec{k}, -i\omega) \right|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

结果表明:

1. 由于各向异性效应, 电磁效应对频谱有影响, 定量修正的量级为 $\left(\frac{K_B T}{m_e C^2} \right)$ 或 $\left(\frac{u_{0x}}{C} \right)^2$.
2. 由于各向异性效应导致的电磁波耦合, 散射频谱的强度不仅仅决定于纵波介电函数的性质, 而且与电磁波色散函数有关.
3. 当 $C \rightarrow \infty$ 或 $u_0 \rightarrow 0$, (21)式与(10)式相符. 当 $u_{0x} \rightarrow 0$, 即散射波矢的方向与束流方向一致时, 散射频谱与(10)式一致. 因为此时静电波和电磁波不发生耦合, 电磁效应的统计平均不给出附加修正.

四、各向异性平衡态分布(II)

本节讨论双温麦克斯韦分布情况, 这时

$$f_{a_0}(\vec{v}) = \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T_a} \right) \left(\frac{m_a}{2\pi K_B T_v} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{m_a (v_x^2 + v_y^2)}{2K_B T} - \frac{m_a v_z^2}{2K_B T} \right], \tag{22}$$

不失一般性, 选取坐标如图(3)所示, 可以证明, 在此情况下散射结构因子频谱为

$$S(\vec{k}, \omega) = S_e(\vec{k}, \omega) + S_i(\vec{k}, \omega), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
S_e(\vec{k}, \omega) = & \frac{2\pi}{k} F_e(\frac{\omega}{k}) \left\{ \left| 1 + A_e(\vec{k}, \omega) \right. \right. \\
& \left. \left. + \mu B_e(\vec{k}, \omega) + \mu^2 C_e(\vec{k}, \omega) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \mu^2 \frac{k_x k_z}{k^2} \omega I_e(\vec{k}, \omega) \right|^2 + \mu^2 \left[k^2 - \mu(k_z^2 - k_x^2) - \right. \\
& \left. - \mu^2 \frac{k_x^2 k_z^2}{k^2} \right] \left(\frac{K_B T}{m_e} \right) \left| I_e(\vec{k}, \omega) \right|^2 \}, \tag{24}
\end{aligned}$$

$$S_i(\vec{k}, \omega) = z \frac{2\pi}{k} F_{i_0}(\frac{\omega}{k}) \left\{ \left| A_e(\vec{k}, \omega) + \mu B_e(\vec{k}, \omega) + \mu^2 C_e(\vec{k}, \omega) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \mu^2 \frac{k_x k_z}{k^2} \omega I_e(\vec{k}, \omega) \right|^2 + \mu^2 \left[k^2 - \mu(k_z^2 - k_x^2) - \mu^2 \frac{k_x^2 k_z^2}{k^2} \right] \left(\frac{K_B T}{m_e} \right) \left| I_e(\vec{k}, \omega) \right|^2 \right\} \tag{25}$$

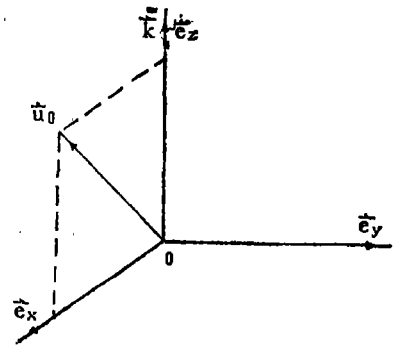


图3

其中

$$A_e(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega(\vec{k}, p)} \cdot \left[\Delta_e(\vec{k}, p) \cdot \Lambda^+(\vec{k}, p) \right] \Big|_{p=-i\omega} \quad (26)$$

$$B_e(\vec{k}, \omega) = - \frac{(k_x^2 - k_y^2) U(\vec{k}, p) \Delta_e(\vec{k}, p)}{W(\vec{k}, p)} \Big|_{p=-i\omega} \quad (27)$$

$$C_e(\vec{k}, \omega) = \frac{k_x^2 k_y^2}{k^4 W(\vec{k}, p)} \left[\frac{p^2}{C^2} (\Delta + M) M_e - 2k^2 U \Delta_e \right] \Big|_{p=-i\omega} \quad (28)$$

$$I_e(\vec{k}, \omega) = \frac{k_x k_y \omega}{k^2 C^2 \omega(\vec{k}, p)} (\Delta_e + M_e + M \Delta_e - \Delta M_e) \Big|_{p=-i\omega} \quad (29)$$

$$W(\vec{k}, p) = \left\{ \Lambda^+ \varepsilon^+ - \mu \varepsilon^+ (k_x^2 - k_y^2) U \right. \\ \left. - \mu^2 \frac{k_x^2 k_y^2}{k^2} \left[2\varepsilon^+ U + \frac{p^2}{k^2 C^2} (\Delta + M)(1 + M) \right] \right\} \Big|_{p=-i\omega}, \quad (30)$$

是色散函数，和

$$\Delta_a = \Delta_a(\vec{k}, p) = \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \frac{ikF'_{a0}(u)du}{p+iku}, \quad \Delta = \sum_a \Delta_a, \quad U = \sum_a \left(\frac{K_B T}{m_a C^2} \right) \Delta_a$$

$$M_a = M_a(\vec{k}, p) = \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \frac{F_{a0}(u)du}{p+iku}, \quad M = \sum_a M_a,$$

$$\Lambda^+ = \Lambda^+(\vec{k}, p) = \frac{p^2}{C^2} + k^2 + \frac{p^2}{C^2} M, \quad \varepsilon^+ = 1 - \Delta(\vec{k}, p),$$

$$T = \frac{T_+ k_x^2 + T_- k_y^2}{k^2}, \quad \mu = \frac{T_- - T_+}{T},$$

$$F_{a0}(u) = \int \delta(u - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{k}) f_{a0}(\vec{v}) d\vec{v}$$

结果表明：

(i) 当各向异性因子 $\mu \rightarrow 0$ ，或 $C \rightarrow \infty$ 时，(23) 式与只计及库仑相互作用的结果一致，此时电磁效应对频谱无影响。

(ii) 在一般情况下，对双温麦克斯韦分布的等离子体，电磁效应对频谱的定量修正由(23)式给出。

五、讨 论

本文从伏拉索夫——试探粒子模型出发，结合完全电磁相互作用体系所满足的麦克斯韦方程组，讨论了电磁相互作用对电子密度涨落和散射在等离子体中的散射效应，结果表明，

(一) 对于平衡态是各向同性的分布、无外加场、均匀的等离子体，只考虑粒子间的库仑相

相互作用是合理的, 此时电磁效应对散射频谱无影响。

(二) 对于平衡态是各向异性、均匀、无外场的等离子体, 电磁效应对散射频谱有附加修正, 此时只计及粒子间的库仑相互作用就并非完全合理。

(三) 当有外加恒定磁场存在时, 即使平衡态是各向同性的麦克斯韦分布, 电磁效应也将对散射频谱有修正。^[10]

参 考 文 献

- [1] E.E.Salpeter, Phys. Rev., 1528, 120(1960).
- [2] J.P.Dougherty and D.T.Farley, Proc. Roy. Soc. A., 79, 259(1960).
- [3] D.T.Farley, J.P.Dougherty and D.w.Barron, proc. Roy. Soc. A., 263, 238(1961).
- [4] E.E.Salpeter, Phys. Rev., 1663122 (1961).
- [5] A.I.Akhiezer et al, Plasma Electrodynamics Vol. II, Nonlinear Theory and Fluctuations, Chap. 11—12, Pergamon press(1975).
- [6] M.N.Rosenbluth and N.Rostoker, Phys. Fluids. 5, 776(1962).
- [7] Ichimaru, S., Ann. Phys., Paris 20, 78(1962).
- [8] N.A.Krall and A.W.Triepiece, Principle of Plasma Physics, Chap. 11, McGraw-Hill(1973).
- [9] 陆全康, 陈国荣等人, 物理学报, 32, 618(1983).
- [10] 陆全康, 陈虹, 尹琼, 王文华, 自然杂志, I., 555(1984).

On Electron Density Fluctuations and Radiation Scattering in a Plasma

Chen Hong Lu Quankang

(Department of Physics, Fudan University)

Abstract

In this paper, on the basis of considering the full electromagnetic forces between charged particles, the conditions of neglecting the Lorentz force are discussed by means of the Vlasov-Test particles Model, and the qualitative corrections of scattering spectrum are obtained in plasma with anisotropic velocity distribution

Keywords: plasma, scatter, electromagnetic forces