一九八八年 福州大学学报 №2
第二期 JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY 1988

无序划分的若干计数式

刘宗廉

（计算机系）

提要

正整数的“划分”问题是组合论的重要内容之一，但在n为大数的情况下，欲求其无序划分之个数，并非易事。本文就无序划分的个数问题，提出了若干求其确值的计数式。

关键词：无序划分，组合论

本文所论的划分均指无序划分，所谓正整数n的一个无序划分，是把n无序地分解成若干正整数的和，即

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k,\ n_i>0\ (1\leqslant i\leqslant k),\ k\geqslant 1$$

此处，对诸n_i任意调换位置后均只视为一种划分。由于正整数n对其划分的方法不一，因此我们将不同的划分法之个数称为划分数，记为$p(n)$。

一、关于p(n)的若干计数式

将这些计数式列下，然后逐个证明。

$$(\text{I}).(a).\ p(n)=p(n-1)+\frac{1}{n}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}} k|_s\cdot g(n-s)=p(n-1)+g(n)\qquad(n\geqslant 2)$$

其中$g(n)$表示n分成为每部分都不是数1的划分数。式中$\sum\limits_{K} k|_s$表示对s能被k整除时求和。

$$(b).\quad p(n)=1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}\ \sum_{l=2}^{n}\sum_{s=2}^{l}\frac{1}{l}\cdot k|_s\cdot g(l-s)\qquad(n\geqslant 2)$$

$$(\text{II}).(a).\ p(n)=\sum_{K\geqslant 1} k|_{(n+1)}-2p(n-1)+5p(n-4)+7p(n-6)$$
$$-12p(n-11)-15p(n-14)+22p(n-21)+26p(n-25)$$
$$-35p(n-34)-40p(n-39)+\cdots$$

式中$\sum\limits_{K\geqslant 1} k|_{(n+1)}$表示对$(n+1)$能被$k$整除时求和。

本文1986年10月9日收到。

(b). $np(n)-(n-1)p(n-1)-(n-2)p(n-2)+(n-5)p(n-5)+(n-7)p(n-7)-(n-12)p(n-12)-(n-15)p(n-15)+\cdots=\sum_{K\geqslant 1}k|_n$.

(Ⅲ). $p(n)=\sum_{K=0}^{n+1}p_1(k)=p(n-1)+p_1(n+1)$, 并且

$$p_1(n)-p_1(n-1)-p_2(n-2)+p_1(n-5)+p_1(n-7)-p_1(n-12)-p_1(n-15+p_1(n-22)+p_1(n-26)-\cdots=0 \qquad (n\geqslant 3)$$

其中$p_1(n)$表示n的每一种划分中都必须有一个且仅有一个数1的划分数。

(Ⅳ). $p(n)=\sum_{K=1}^{n}p^{(k)}{}_{(n)}$

其中 $$p^{(k)}{}_{(n)}=\begin{cases}0 & \text{当}n<k\text{时}\\ 1 & \text{当}n=k\text{时}\\ \dfrac{1}{n-k}\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i=1}^{K}i\cdot p^{(k)}_{(n-il)} & \text{当}n>k\text{时}\end{cases}$$

而$p^{(k)}{}_{(n)}$为正整数n划分成最大分部量为k的划分数。

二、计数式的证明

式(Ⅰ)的证明。作序列$\{g(n)\}_{n\geqslant 0}$的生成函数:

$$G(x)=\sum_{r\geqslant 0}g(r)x^r$$

因$1+x^i+x^{2i}+x^{3i}+\cdots=\dfrac{1}{1-x^i}$ $(i=1,2,\cdots)$中的x^{Ki}表示正整数i在划分中出现k次($k=0,1,2,\cdots$),故知数1在划分中不出现而其它正整数允许重复出现的划分数序列$\{g(n)\}_{n\geqslant 0}$之生成函数为

$$G(x)=\prod_{i\geqslant 2}\frac{1}{1-x^i}$$

由于 $$\frac{1}{1-x^i}=\prod_{l\geqslant 0}(1+x^{2^l\cdot i})$$

因之 $$G(x)=\prod_{i\geqslant 2}\prod_{l\geqslant 0}(1+x^{2^l\cdot i})$$

上式两端取对数并微分,然后两端各乘x得

$$\frac{x\dfrac{d}{dx}G(x)}{G(x)}=\sum_{i\geqslant 2}\sum_{l\geqslant 0}\frac{2^l\cdot i\cdot x^{2^l\cdot i}}{1+x^{2^l\cdot i}}=\sum_{i\geqslant 2}\sum_{l\geqslant 0}\frac{2^l\cdot i(x^{2^l\cdot i}-x^{2\cdot 2^l\cdot i})}{1-x^{2\cdot 2^l\cdot i}}$$

$$=\sum_{i\geqslant 2} i\left(\sum_{K\geqslant 1} x^{Ki}\right)$$

即 $x\dfrac{d}{dx}G(x)=\left(\sum_{i\geqslant 2}\sum_{K\geqslant 1} ix^{Ki}\right)G(x)=\left(\sum_{i\geqslant 2}\sum_{K\geqslant 1} ix^{Ki}\right)\left(\sum_{r\geqslant 0} g(r)x^r\right)$

亦即 $\sum_{r\geqslant 0} rg(r)x^r=\sum_{r\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 2}\sum_{K\geqslant 1} ig(r)x^{Ki+r}=\sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i\geqslant 2}\sum_{K\geqslant 1} ig(n-Ki)\right)x^n$

比较上式两端x^n之系数，则有

$$g(n)=\frac{1}{n}\sum_{i\geqslant 2}\sum_{K\geqslant 1} i\cdot g(n-ki) \qquad (n\geqslant 2)$$

若令$s=Ki$，$g(-l)\triangleq 0$，可得

$$g(n)=\frac{1}{n}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\substack{K\geqslant 1\\ S|_K\geqslant 1}} K|_s\cdot g(n-s),\quad (n\geqslant 2) \qquad (*)$$

显然，n的划分不外乎由n分成为每一种都含有数1的划分与n分成为每一部分都不是数1的划分所组成。而前者的每一种划分可从正整数$(n-1)$的每一种划分中加上数1而得到，可见其划分数为$p(n-1)$。于是式(Ⅰ)$_{(a)}$得证。

反复利用(Ⅰ)$_{(a)}$ $n-1$次，并注意到$p(1)=1$，即得(Ⅰ)$_{(b)}$。

式(Ⅱ)的证明。考虑n的无序划分数序列$\{p(n)\}_{n\geqslant 0}$的生成函数：

$$P(x)=\sum_{n\geqslant 0} p(n)x^n$$

由于$p(x)=\prod_{i\geqslant 1}\dfrac{1}{1-x^i}$，即$\ln p(x)=-\sum_{i\geqslant 1}\ln(1-x^i)$

于是 $\dfrac{1}{p(x)}\cdot x\cdot\dfrac{dp(x)}{dx}=\sum_{i\geqslant 1}\dfrac{ix^i}{1-x^i}=\sum_{\substack{i\geqslant 1\\ k\geqslant 1}} ix^{Ki}$ $\quad\cdots\quad (**)$

将Euler公式：$\dfrac{1}{p(x)}=1+\sum_{r\geqslant 1}(-1)^r\left(x^{\frac{3r^2-r}{2}}+x^{\frac{3r^2+r}{2}}\right)$ 的两端微分并由$(**)$，则得

$$\sum_{\substack{i\geqslant 1\\ K\geqslant 1}} i\cdot x^{Ki}=\sum_{l\geqslant 0}\left[\sum_{r\geqslant 1}(-1)^{r+1}\left(\frac{3r^2-r}{2}\right)p(l)x^{\frac{3r^2-r}{2}+l}\right.$$

$$\left.+\frac{3r^2+r}{2}\,p(l)x^{\frac{3r^2+r}{2}+l}\right)\Bigg]$$

比较上式x^n之系数，有

$$\sum_{r\geqslant 1}(-1)^{r+1}\left[\frac{3r^2-r}{2}p\left(n-\frac{3r^2-r}{2}\right)+\frac{3r^2+r}{2}p\left(n-\frac{3r^2+r}{2}\right)\right]=\sum_{K\geqslant 1}k|_n.$$

若把其中的n用$n+1$代之，即得(Ⅱ)$_{(a)}$.

再由(**)与Euler公式，易得

$$\left[1+\sum_{r\geqslant 1}(-1)^r\left(x^{\frac{3r^2-r}{2}}+x^{\frac{3r^2+r}{2}}\right)\right]\cdot\left[\sum_{l\geqslant 1}lp(l)x^l\right]=\sum_{\substack{i\geqslant 1\\ k\geqslant 1}}ix^{Ki}$$

通过比较x^n的系数便有(Ⅱ)$_{(b)}$.

式(Ⅲ)的证明。设$p_1(n)$表示n的每一种划分中都必须有一个且仅有一个数1的划分数，$p^*(n)$及$p^{**}(n)$分别表示含有数1及不含有数1的划分数。易见$p^*(n)=p(n-1)$，$p^{**}(n)=p_1(n+1)$。故有

$$p(n)=p^*(n)+p^{**}(n)=p(n-1)+p_1(n+1)$$

于是 $p(x)=\sum_{r\geqslant 0}p(r)x^r=x\sum_{K\geqslant 0}p(k)x^K+\sum_{r\geqslant 0}p_1(r+1)x^r,$

其中 $p(-l)\triangleq 0$

此即 $p(x)=\dfrac{1}{1-x}\sum_{r\geqslant 0}p_1(r+1)x^r=\sum_{l\geqslant 0}\sum_{r\geqslant 0}p_1(r+1)x^{l+r}$

$$=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{l=0}^{n+1}p_1(n-l+1)x^n$$

可见 $p(n)=\sum_{l=0}^{n+1}p_1(n-l+1)=p_1(n+1)+p_1(n)+\cdots+p_1(0)=\sum_{K=0}^{n+1}p_1(k).$

再作序列$\{p_1(n)\}$的生成函数$F(x)=\sum_{n\geqslant 1}p_1(n)x^n$。

因 $$F(x)=\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots}=(x-x^2)p(x)$$

由Euler公式，得

$$\left[1+\sum_{K\geqslant 1}(-1)^K\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}}+x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)\right]\cdot\left[\sum_{r\geqslant 1}p_1(r)x^r\right]=x-x^2$$

即 $\sum_{n\geqslant 1}p_1(n)x^n+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{K\geqslant 1}(-1)^K\left[p_1\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+p_1\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)\right]x^n=x-x^2$

故知

$$p_1(n)+\sum_{K\geqslant 1}(-1)^K\left[p_1\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+p_1\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)\right]=0\quad(n\geqslant 3)$$

于是(Ⅱ)得证。

式(Ⅳ)的证明。设n的划分最大分部量为k($k=1$, 2, …, n),那么剩下的正整数($n-k$)在这一划分中的分部量应不超过k,于是有

$$p(n)=\sum_{K=1}^{n}p^{\leqslant K}(n-k)$$

其中$p^{\leqslant K}(n-k)$为($n-k$)的分部量不超过k的划分数。

若以$p\binom{k}{x}$表n的最大分部量为k的划分数,则这个划分数是生成函数:

$$p\binom{k}{x}=\frac{x^K}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^K)}$$

展开式中x^n的系数。而$p^{\leqslant K}(n-k)$为生成函数:

$$p^{\leqslant K}(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^K)}$$

展开式中x^{n-K}之系数。可见,($x-k$)的分部量不超过k的划分数等于n的最大分部量为k的划分数。因之,$p(n)=\sum_{K=1}^{n}p\binom{K}{n}$.

兹求$p\binom{k}{n}$.

$$\because p\binom{k}{x}=\sum_{r\geqslant 0}p\binom{K}{r}x^r=\frac{x^K}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^K)}$$

$$\therefore \ln p\binom{k}{x}=k\ln x-\sum_{i=1}^{K}\ln(1-x^i)$$

微分得

$$\frac{x}{p\binom{K}{x}}\ \frac{dp\binom{K}{x}}{dx}=k+\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i=1}^{K}ix^{li}$$

即 $$\sum_{r\geqslant 0}rp\binom{K}{r}x^r=\left(k+\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}ix^{li}\right)\left(\sum_{r\geqslant 0}p\binom{k}{r}x^r\right)$$

$$=k\sum_{r\geqslant 0}p\binom{k}{r}x^r+\sum_{r\geqslant 0}\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}ip\binom{k}{r}x^{li+r}$$

故

$$(n-k)p\binom{k}{n}=\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}ip\binom{k}{n-li}\qquad (n>k)$$

易知,若$k>n$. 则$p\binom{k}{n}=0$; 若$n=k$, 则$p\binom{k}{n}=1$; 同时还有$p\binom{1}{n}=1$。

三、算例

利用上述计数式计算$p(n)$。

例1． 先由（*），显然有$g(0)=1$，$g(1)=0$，

$$g(2)=\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{2}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}k|_s\cdot g(2-s)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_2\geqslant 2}}k|_2\cdot g(0)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot g(0)=1,$$

$$g(3)=\frac{1}{3}\sum_{s=2}^{3}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}k|_s\cdot g(3-s)=\frac{1}{3}\Big[\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_2\geqslant 2}}k|_2\cdot g(1)+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_3\geqslant 2}}k|_3\cdot g(0)\Big]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot g(0)=1,$$

$$g(4)=\frac{1}{4}\sum_{s=2}^{4}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}k|_s\cdot g(4-s)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}\Big(k|_2\cdot g(2)+k|_3\cdot g(1)+k|_4\cdot g(0)\Big)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k|_s\geqslant 2}}(k|_2+k|_4)=\frac{1}{4}(2+4+2)=2$$

同样可求得$g(5)=2$，$g(6)=g(7)=4$，$g(8)=7$，$g(9)=8$，$g(10)=12$等等。

再利用式$(\mathrm{I})_{(a)}$，得

$p(2)=p(1)+g(2)=2$ （$\because p(1)=1$），

$p(3)=p(2)+g(3)=2+1=3$，

$p(4)=p(3)+g(4)=5$以及$p(5)=7$，$p(6)=11$，$p(7)=15$，$p(8)=22$，$p(9)=30$，$p(10)=42$等等。

例2． 利用式$(\mathrm{I})_{(a)}$及例1已得的结果，并注意到$p(-l)=0$求得

$$p(11)=\sum_{K\geqslant 1}k|_{12}-2p(10)+5p(7)+7p(5)-12p(0)=56$$

$$p(12)=\sum_{K\geqslant 1}k|_{13}-2p(11)+5p(8)+7p(6)-12p(1)=77$$

利用式$(\mathrm{I})_{(s)}$求得当$n=13$时

$$13p(13)-12p(12)-11p(11)+8p(8)+6p(6)-p(1)=\sum_{K\geqslant 1}k|_{13}，即$$

$$13p(13)-12\times 77-11\times 56+8\times 22+6\times 11-1=14$$

$\therefore p(13)=101$

例3． 利用式（Ⅱ），并注意到$p_1(0)=p_1(2)=0$，$p_1(1)=1$求$p(14)$与$p(15)$）.

$\because$由$p_1(3)-p_1(2)-p_1(0)=0$，得$p_1(3)=1$，因之$p(2)=p(1)+p_1(3)=2$，

由$p_1(4)-p_1(3)-p_1(2)=0$，得$p_1(4)=1$，因之$p(3)=p(2)+p_1(4)=3$，

由$p_1(5)-p_1(4)-p_1(3)+p_1(0)=0$，得$p_1(5)=2$，因之$p(4)=p(3)+p_1(5)=5$，

仿此做下去，可得$p_1(6)=2$，$p_1(7)=p_1(8)=4$，$p_1(9)=7$，$p_1(10)=8$，$p_1(11)=12$，$p_1(12)=14$，$p_1(13)=21$，$p_1(14)=24$，$p_1(15)=34$，$p_1(16)=41$等等。

于是 $p(14)=\sum_{K=0}^{15} p_1(k)=135$， $p(15)=\sum_{K=0}^{16} p_1(k)=176$

参 考 文 献

[1] R.A.Brualdi, Introductory Combinatorics, Elsevier North—Holland, Inc., New York, (1977).

[2] Daniel I.A.Cohen, Basic Techniques of Combinatorial Theory, John Wiley and Sons.Inc.New York, (1978).

[3] 柯召、魏万迪，组合论，科学出版社，北京，(1981)。

Counting Formulas for Non-order partitions

Liu Zhonglian

(Department of Computer Science)

Abstract

The problem of partitions is one of the important contents of combinatorial theory. But it is rather diffcult to calculate its values p(n) for large n.

In this paper, some counting formulas for non-order partitions with adequate examples are given to illustrate its applications.

Keywords: non-order patitions, combinatorial theory