一九八八年　　福州大学学报　　№ 2
第二期　　JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY　　1988

具有大绝对稳定域的一类隐式方法及其新的迭代技巧

刘发旺

（计算机系）

摘　　要

导出一类含有参数的高阶隐式线性多步法，它的绝对稳定域可以任意地扩大，并且可保证零稳定。对于隐式方法，给出一种新的迭代技巧，扩大有效稳定域，并且提高收敛速度。

关键词：stiff微分方程，零稳定，绝对稳定域，新的迭代技巧。

一、含有参数α的三阶隐式方法

1．方接的构造

对初值问题 $\begin{cases} Y'=f(t,y) \\ Y(0)=Y_0 \end{cases}$　　(1.1)

一般的隐式线性多步法具有如下形式：

$$\sum_{i=0}^{K}\alpha_{Ki}Y_{n+1-i}=\sum_{i=0}^{K}h\beta_{Ki}f_{n+1-i},\quad \beta_{K0}\neq 0 \tag{1.2}$$

取$K=2$；$\alpha_{20}=1$，$\alpha_{21}=-(1+\alpha)$，$\alpha_{22}=\alpha$，

$\beta_{20}=(5+\alpha)/12$，$\beta_{21}=8(1-\alpha)/12$，$\beta_{22}=-(1+5\alpha)/12$

其截断误差为　　(1.3)

$$T_4=-\frac{(1+\alpha)h^4y_n^{(4)}}{24} \tag{1.4}$$

于是，得到含有参数α的三阶隐式方法：

$$Y_{n+1}=(1+\alpha)Y_n-\alpha Y_{n-1}+h[(5+\alpha)f_{n+1}+8)1-\alpha)f_n-$$
$$-(1+5\alpha)f_{n-1}]/12 \tag{1.5}$$

相应的稳定多项式为：

$$\pi(\xi;h)=\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi)=0 \tag{1.6}$$

其中$\bar{h}=\lambda h$，$h>0$为步长，λ为试验方程$Y'=\lambda Y$的系数，且$R_e\lambda<0$，而

本文1987年1月21日收到

$$\rho(\xi)=\xi^2-(1+\alpha)\xi+\alpha=(\xi-1)(\xi-\alpha) \tag{1.7-1}$$

$$\sigma(\xi)=[(5+\alpha)\xi^2+8(1-\alpha)\xi-(1+5\alpha)]/12 \tag{1.7-2}$$

因此，由(1.7-1)知，我们只要限制满足下式

$$|\alpha|<1 \tag{1.8}$$

就能保证方法是零稳定。

2. 方法的绝对稳定性

根据边界轨迹方法[1]，稳定域边界$\partial\Omega_\alpha$的轨迹由

$$\bar{h}(e^{i\theta})=\rho(e^{i\theta})/\sigma(e^{i\theta})\overset{令}{=}X(\theta)+iY(\theta) \tag{1.9}$$

给出。当θ从0递增到2π，相应点在$h\lambda$一复平面上画出一条封闭的曲战$\partial\Omega_\alpha$。可以证明，当$-1<2<1$，时由线$\partial\Omega_\alpha$在$h\lambda$一复平面上围成一个单连通域Ω_α，且与实轴有两个交点$(0,0)$，$(-6(1+\alpha)/(1-\alpha),\ 0)$。由(1.9)式可知，稳定集的边界$\partial\Omega_\alpha$位于负半平面内，形状并非真正大园，靠近虚轴绝对稳定区域较宽广，对解高频震荡系统是有利的。

现在，证明方法(1.5)式的稳定性。

定理：当$-1<\alpha<1$时，公式(1.5)稳定，且绝对稳定域为Ω_α。

证明：由(1.6)式，我们有

$$\xi^2+\frac{12(1+\alpha)+8(1-\alpha)\bar{h}}{12-(5+\alpha)\bar{h}}\xi+\frac{12+(1+5\alpha)\bar{h}}{12-(1+\alpha)\bar{h}}=0 \tag{1.10}$$

根据[2]中确定绝对稳定区域的方法，只要找到一点$\bar{h}\in\Omega_\alpha$，使方程(1.10)的两个根均在单位园内，则Ω_α即为绝对稳定区域。

二次方程(1.10)的两个根按模小于1的充要条件为

$$|[12\alpha+(1+5\alpha)\bar{h}]/[12-(5+\alpha)\bar{h}]|<1 \tag{1.11}$$

$$\left|\frac{12(1+\alpha)+8(1-\alpha)\bar{h}}{12-(5+\alpha)\bar{h}}\right|<1+\frac{12\alpha+(1+5\alpha)\bar{h}}{12-(5+\alpha)\bar{h}} \tag{1.12}$$

取$\bar{h}=-(1+\alpha)/(1-\alpha)\in(-6(1+\alpha)/(1-\alpha),\ 0)$，不难验证上式成立。因此，方程(1.10)的根的模皆小于1。

注意到，当$\alpha\to 1-0$时，$\bar{h}(e^{i\pi})\to-\infty$，即绝对稳定性区间可以任意增大。

二、含参数α、β的四阶隐式线性多步法

取$K=3$；$\alpha_{30}=1$，$\alpha_{31}=-(1+\alpha)$，$\alpha_{32}=\alpha+\beta$，$\alpha_{33}=-\beta$，

$$\beta_{30}=(9+\alpha+\beta)/24,\quad \beta_{31}=(19-13\alpha-5\beta)/24, \tag{2.1}$$

$$\beta_{32}=(-5-13\alpha+19\beta)/24,\quad \beta_{33}=(1+\alpha+9\beta)/24$$

其截断误差为

$$T_5=-\frac{(19+11\alpha+19\beta)h^5y_n^{(5)}}{720} \tag{2.2}$$

于是，得到含参数α、β的四阶隐式方法：

$$Y_{n+1}=(1+\alpha)Y_n-(\alpha+\beta)Y_{n-1}+\beta Y_{n-2}+h[(9+\alpha+\beta)f_{n+1}+ \tag{2.3}$$

$$+(19-13\alpha-5\beta)f_n-(5+13\alpha-19\beta)f_{n-1}+(1-\alpha+9\beta)f_{n-2}]/24$$

其相应的稳定多项式为：

$$\pi(\xi; h)=\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi)=0 \tag{2.4}$$

其中 $\rho(\xi)=\xi^3-(1+\alpha)\xi^2+(\alpha+\beta)\xi-\beta$ (2.5-1)

$$\sigma(\xi)=[(9+\alpha+\beta)\xi^3+(19-13\alpha-5\beta)\xi^2-$$
$$-(5+13\alpha-19\beta)\xi+(1+\alpha+9\beta)]/24 \tag{2.5-2}$$

把(2.5-1)式改写为$\rho(\xi)=(\xi-1)(\xi^2-\alpha\xi+\beta)$ (2.6)

为了使(2.6)式中第二个因子的零点位于单位圆内部，其充要条件为

$$|\beta|<1 \text{ 且 } |\alpha|<1+\beta \tag{2.7}$$

如果限制 $0<\alpha\leqslant 1$， $0<\beta<1$ (2.8)

就能保证方法是零稳定的。

根据边界轨迹法，稳定区域边界$\partial\Omega_{\alpha\beta}$的轨迹由

$$\bar{h}(e^{i\theta})=\rho(e^{i\theta})/\sigma(e^{i\theta}) \tag{2.9}$$

给出。当θ从 0 递增到 2π，相应点在$h\lambda$—复平面上画出一条封闭的曲线 $\partial\Omega_{\alpha\beta}$。可以证明，当 $0<\alpha\leqslant 1$， $0<\beta<1$ 时，曲线$\partial\Omega_{\alpha\beta}$在$h\lambda$—复平面上围成一个单连通域$\Omega_{\alpha\beta}$，且与实轴有两个交点(0,0)，$(0, -3(1+\alpha+\beta)/(1-\beta))$。由(2.9)可知，稳定集的边界$\partial\Omega_{\alpha\beta}$位于负半平面，当$\beta\to 1-0$时，绝对稳定区间可以任意增大，且靠近虚轴，绝对稳定区域较宽广。

现在，证明方法(2.3)的稳定性。

定理：当 $0<\alpha\leqslant 1$， $0<\beta<1$ 时，方法(2.3)是稳定的，且$\Omega_{\alpha\beta}$为绝对稳定域。

证明：方法(2.3)式所对应的稳定多项式的零点与以下方程的零点是一致的。

$$\xi^3-\frac{24(1+\alpha)+(19-13\alpha-5\beta)\bar{h}}{24-(9+\alpha+\beta)\bar{h}}\xi^2+$$
$$+\frac{24(\alpha+\beta)+(5+13\alpha-19\beta)\bar{h}}{24-(9+\alpha+\beta)\bar{h}}\xi-\frac{24\beta+(1+\alpha+9\beta)\bar{h}}{24-(9+\alpha+\beta)\bar{h}}=0 \tag{2.10}$$

当$\bar{h}$取负实数时，多项式(2.10)为实系数多项式，记为

$$\xi^3+p\xi^2+q\xi+r=0 \tag{2.11}$$

其根按模皆小于 1 的充要条件为[4]：

$$\begin{cases} 1+r>0, \quad 1-r>0, \quad 1+p+q+r>0; \\ 1-p+q-r>0, \quad 1-q+pr-r^2>0 \end{cases} \tag{2.12}$$

不难验证，(2.12)的第 1 — 3 式，对于所有$\bar{h}<0$皆成立。取$\bar{h}=-1\in(-3(1+\alpha+\beta)/(1-\beta), 0)$，有$1-p+q-r>0$。又注意到$0<\alpha\leqslant 1$，$0<\beta<1$，$1-\beta-\alpha+\alpha\beta>0$，有 $1-q+pr-r^2>0$

所以，方程(2.11)的根按模皆小于 1。由于在$\partial\Omega_{\alpha\beta}$上，$\pi(\xi; h)$的零点中具有按模为 1 的零点，故$\partial\Omega_{\alpha\beta}$不可穿过区间$(-3(1+\alpha+\beta)/(1-\beta), 0)$。

三、一种新的迭代技巧

对于上面两节推导的隐式方法可写成如下形式：

$$Y_{n+1}=-\sum_{i=1}^{K}\alpha_{Ki}Y_{n+1-i}+\sum_{i=0}^{K}h\beta_{Ki}f_{n+1-i} \tag{3.1}$$

求解(3.1)的简单迭代格式为：

$$Y_{n+1}^{(l+1)}=-\sum_{i=1}^{K}(\alpha_{Ki}Y_{n+1-i}-h\beta_{Ki}f_{n+1-i})+h\,\beta_{K0}f_{n+1}^{(l)} \tag{3.2}$$

对于模型方程$Y'=\lambda Y$，迭代收敛条件是由下式决定的 (3.3)

$$|\beta_{K0}h\lambda|<1$$

即在$h\lambda$—复平面上，收敛域是一个圆，圆心在原点，而半径为$1/|\beta_{K0}|$。该圆和方法稳定域的交构成了有效稳定域，虽然方法(3.1)的绝对稳定域可以任意增大，但条件(3.3)是一个苛刻的限制。为此，引入实参数p（$0<p<1$），得到新的迭代格式：

$$Y_{n+1}^{(l+1)}=w_n+pY_{n+1}^{(l)}+(1-p)h\beta_{K0}f_{n+1}^{(l)} \tag{3.4}$$

其中 $w_n=(1-p)\sum_{i=1}^{K}[-\alpha_{Ki}Y_{n+1-i}+h\beta_{Ki}f_{n+1-i}]$

这时，对模型方程$Y'=\lambda Y$，(3.4)式的迭代收敛条件由下式决定：

$$|p+(1-p)\bar{h}\beta_{K0}|<1 \tag{3.5}$$

这清楚表明，在$h\lambda$—复平面上，收敛域是个圆，圆心向左移，而半径被放大$1/(1-p)>1$倍。当$p\to 1$时，它将包含整个左半平面。可以通过选取适当的p，可在对步长无任何限制的条件下提高迭代收敛速度，而这种对步长的无限制性使得方法(4.1)的有效稳定域和绝对稳定域完全相同，这种新的迭代技巧正是引入p目的。

最后指出，本文导出的方法及迭代技巧，数值结果与结论一致。

参 考 文 献

[1] J. D. Lambert, Computational methods in ordinary differential equations, (1973).

[2] 刘发旺，福州大学学报，№.3，(1981)。

[3] 刘发旺，计算数学，Vol.9，№.4，(1987)。

[4] 蒋尔雄、高坤敏、吴景琨，线性代数，人民教育出版社，(1978)。

A Class of Implicit Method and Iterative Technics with the Large Region of Absolute Stability

Liu Fawang
(Department of Computer Science)

Abstract

In this paper, we derive a class of higher order implicit linear multistep method with parameter, and its region of absolute stability can be arbitrarily extended and be assured of the zero-stability.

For the implicit method, we give a new iteration technics, to extend the region of effective stability and greatly improve the convergence rate.

Keywords: stiff differential equation, zero-stability, region of absolute stabiltiy, new iteration technics