一九八八年　　福 州 大 学 学 报　　№2
第 二 期　　JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY　　1988

矩阵广义对角占优的若干充要条件

张 天 澍

（数学系）

提　　要

利用矩阵的列向量所生成的闭凸锥及矩阵的行列式来讨论其行广义对角占优的若干充要条件，为判别矩阵是否为广义对角占优提供若干新方法。一些证明采用构造性的，从而为计算的可行性提供了保证。

关键词　广义对角占优矩阵，闭凸锥行列式

一、记号说明

$J_n=\{1,2,\cdots,n\}$——标号集。

$\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$——对角无非零的矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的相依矩阵：

$$\widetilde{a}_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|, & j=i\\ -|a_{ij}|, & j\neq i\end{cases}\qquad (i,j\in J_n)$$

$A^{(i_0,i_0)}$——A去掉第i_0行和第i_0列后所成的$(n-1)\times(n-1)$矩阵$(i_0\in J_n)$。

A_k——A的左上角1至k行及1至k列的元素所成的子矩阵：$A_k=(a_{ij})_{k\times k}$。

T_A——$\widetilde{A}$的列向量$\widetilde{a}^{(1)}$，…，$\widetilde{a}^{(n)}$的生成锥[3]：

$$T_A=Cone\left\{\widetilde{a}^{(1)},\ \cdots,\ \widetilde{a}^{(n)}\right\}。$$

$e_1=(1,0,\cdots,0)^T$，…，$e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^T$——$R^n$上基本单位向量。

$R_+^n=\left\{x\in R^n\,|\,x\geqslant 0\right\}$——$R^n$的第一挂限。

P——$n\times n$置换阵[1]。

二、若干引理

引理1　A为行严格对角占优的充分必要条件是对任一P，$P^TAP=B$为行严格对角占优。

这只要注意到B仅是把A的行以及相应的列同时作置换，对角元仍为对角元即可知之。

推论1　A为行广义对角占优[2,4]的充分必要条件是对任一P，$P^TAP=B$为行广义对角占优。

本文1987年2月20日收到。

引理2　设A为不可约行对角占优[1,5]，则A为行广义对角占优。

证明：记$R^{(0)}=\left\{r\in J_n \,\middle|\, |a_{rr}|>\sum_{j\neq r}|a_{rj}|\right\}$，$S^{(0)}=J_n-R^{(0)}$，

$\delta=\min_{r\in R^{(0)}}\left\{1-\sum_{j\neq r}|a_{rj}|\right\}$。则$R^{(0)}\neq\phi$，且$0<\delta<1$。

若$S^{(0)}=\phi$，即$R^{(0)}=J_n$，显然A为行严格对角占优。否则，取$D^{(1)}=diag(d_1^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$，其中

$$d_i^{(1)}=\begin{cases}1\ , & i\in S^{(0)}\\ 1-\dfrac{\delta}{2}, & i\in R^{(0)}\end{cases}$$

则$D^{(1)}$为正对角阵，且$AD^{(1)}\triangleq A^{(1)}$仍为不可约行对角占优。同时，由$A$的不可约性知$R^{(0)}$为如下$R^{(1)}$的真子集：

$$R^{(1)}=\left\{r\in J_n \,\middle|\, \left|a_{rr}^{(1)}\right|>\sum_{j\neq r}\left|a_{rj}^{(1)}\right|\right\}。$$

若$R^{(1)}=J_n$，则$A^{(1)}$已为行严格对角占优。否则重复上述作法可得：

$$R^{(0)}\subset R^{(1)}\subset\cdots\subset R^{(k)} \tag{1}$$

前者为后者的真子集。经有限的$K(\leqslant n-1)$步后得$A^{(k)}=AD^{(1)}\cdots D^{(k)}\triangleq AD$为行严格对角占优，而$D=D^{(1)}\cdots D^{(k)}$为正对角阵，故$A$为行广义对角占优。

引理3　A为行严格（广义）对角占优，则$A_k(k=1,\cdots,n)$仍为行严格（广义）对角占优。

引理4　A为行广义对角占优的充分必要条件是$\widetilde{A}$为行广义对角占优。

这是由于对正对角阵D，AD为行严格对角占优当且仅当$\widetilde{AD}$为行严格对角占优。

引理5　行广义对角占优矩阵A非奇异。

注意到对正对角阵$D=diag(d_1,\ \cdots,\ d_n)$，$detA$与$det(AD)=detA\times(d_1\cdots d_n)$同号即可。

引理6　A为行广义对角占优的充分必要条件是$T_A=Cone\left\{\widetilde{a}^{(1)},\ \cdots,\ \widetilde{a}^{(n)}\right\}\supset R_+^n$。

证明：充分性。设$T_A\supset R_+^n$，则存在$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T\geqslant 0$，使得

$$\widetilde{A}\alpha=\alpha_1\widetilde{a}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\widetilde{a}^{(n)}\in IntR_+^n \tag{2}$$

可以证得$\alpha>0$。事实上若有$j_0\in J_n$使得$\alpha_{j_0}=0$，则$\widetilde{A}\alpha$的第j_0个分量为

$$-\sum_{j\neq j_0}\alpha_j\left|a_{j_0j}\right|\leqslant 0$$

与(2)式矛盾，所以$\alpha>0$。取$D=diag(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则$AD$为行严格对角占优。

必要性。设A为行广义对角占优，则

1° $det\widetilde{A}\neq 0$，从而$IntT_A\neq\phi$，且$X\in IntT_A$的充分必要条件是存在$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T>0$，使得$X=\widetilde{A}\alpha$。

2° 记$S=T_A\backslash IntT_A$，因T_A为闭，故$S\neq\phi$。

3° 存在正对角阵$D=diag(d_1,\cdots,d_n)$，使得AD为行严格对角占优，故

$$X^{(0)}=\widetilde{A}(d_1,\cdots,d_n)^T=d_1\widetilde{a}^{(1)}+\cdots+\widetilde{a}^{(n)}\in IntR_+^n\cap IntT_A。$$

若存在$X^{(1)}\in IntR_n^+$，但$X^{(1)}\overline{\in}T_A$，则存在$X^*\in S$，使得

$$X^*\in\{X\in R^n\mid \alpha X^{(0)}+(1-\alpha)X^{(1)},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

由$IntR_+^n$之凸性知$X^*\in IntR_+^n$，再由$X^*\in S$，X^*可表为：

$$X^*=\beta_1\widetilde{a}^{(1)}+\cdots+\beta_n\widetilde{a}^{(n)},$$

其中$\beta_1\geqslant 0$，…，$\beta_n\geqslant 0$，且至少有一个为零，设$\beta_{j_0}=0$，这样X^*的第j_0个分量非正，这与$X^*\in IntR_+^n$矛盾。所以必有$X^{(1)}\in T_A$，从而$T_A\supset IntR_+^n$。

$$\therefore\quad T_A=\overline{T_A}\supset\overline{IntR}{}_+^n=R_+^n。$$

引理 7 A为不可约行广义对角占优的充分必要条件是$IntT_A\supset R_+^n$。

证明 设A为不可约行广义对角占优，则

$$\forall\ r\in J_n，有\ e_r\in R_+^n\subset T_A$$

故存在$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T\geqslant 0$，使得$e_r=\widetilde{A}\alpha$。

记$R=\{i\in J_n\mid\alpha_i>0\}$，$S=\{i\in J_n\mid\alpha_i=0\}=J_n\backslash R$。

$\widetilde{A}\alpha$的第r个分量：

$$\alpha_r\left|a_{rr}\right|-\sum_{j\neq r}\alpha_j\left|a_{rj}\right|=1$$

故$r\in R$，从而$R\neq\phi$。若$S\neq\phi$，则$\forall i\in S$有

$$\sum_{j\in R}\alpha_j\left|a_{ij}\right|=0$$

所以对一切$i\in S$及$j\in R$均有$a_{ij}=0$，这与A的不约性矛盾，故$S=\phi$，$R=J_n$，即$\alpha>0$，或言$e_r\in IntT_A$从而$R_+^n=Cone\{e_1,\cdots,e_n\}\subset IntT_A$。

设$IntT_A\supset R_+^n$，则$\forall i\in J_n$有

$$e_i\in IntT_A \tag{3}$$

由引理 6 知，只要证明A为不可约矩阵即可。若不然，不失一般性，可设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$$

其中A_{11}为$k\times k$不可约矩阵$(1\leqslant k<n)$，A_{22}为$(n-k)\times(n-k)$矩阵，A_{12}为$k\times(n-k)$矩阵。

显然$A_{11}=A_k$为行广义对角占优矩阵，故存在$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-k})^T$，使得$\widetilde{A}\alpha=e_1+\cdots+e_k$。因为$\alpha$有零分量，所以$\widetilde{A}\ \bar{\alpha}\in IntT_A$。但由（3）知

$$e_1+e_2+\cdots+e_k\in IntT_A$$

结果矛盾，说明A不可约。

三、几个定理

定理1 设A不可约，则A为行广义对角占优的充分必要条件是$det\widetilde{A}\neq 0$，且$\widetilde{A}_{1j}/det\widetilde{A}>0$，$j=1,\cdots,n$（其中$\widetilde{A}_{ij}$为$\widetilde{A}$的元素$\widetilde{a}_{ij}$的代数余子式，下同）。

证明 记

$$\Delta_1=\left(\frac{\widetilde{A}_{11}}{det\widetilde{A}},\ \cdots,\ \frac{\widetilde{A}_{1n}}{det\widetilde{A}}\right)^T$$

充分性。设$\Delta_1>0$，则依行列式性质有

$$\widetilde{A}\Delta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=e_1$$

取$D=diag(d_1,\ \cdots,\ d_n)$，其中

$$d_i=\frac{\widetilde{A}_{1i}}{det\widetilde{A}},\qquad i=1,\cdots,n$$

则D为正对角阵，且$\widetilde{A}D$为不可约行对角占优，进而A为行广义对角占优。

必要性。由引理4和5知$det\widetilde{A}\neq 0$，再由引理7知$IntT_A\supset R_+^n$，故存在$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)^T>0$，使得

$$\widetilde{A}\alpha=e_1=\widetilde{A}\Delta_1$$

由$det\widetilde{A}\neq 0$知$\alpha=\Delta_1$，故$\Delta_1>0$，即得必要性。

推论1.1 设A不可约且为行广义对角占优，则对一切$i\in J_n$，$j\in J_n$有

$$\widetilde{A}_{ij}/det\widetilde{A}>0$$

推论1.2 对矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若$det\widetilde{A}\neq 0$，且对某$i_0\in J_n$有$\widetilde{A}_{i_0j}>0\ (\forall j\in J_n)$则对一切$i\in J_n$有$\widetilde{A}_{ij}>0\ (\forall j\in J_n)$。

定理2 A为行广义对角占优的充分必要条件是$det\widetilde{A}\neq 0$，且对一切$i\in J_n$，$j\in J_n$有

$$\frac{\widetilde{A}_{ii}}{det\widetilde{A}}\geqslant 0$$

证明 记

$$\varDelta_i=\left(\frac{\widetilde{A}_{i1}}{det\widetilde{A}},\cdots,\frac{\widetilde{A}_{in}}{det\widetilde{A}}\right)^T (i\in J_n)$$

充分性。$\forall i\in J_n$，有

$$\varDelta_i\geqslant 0 \text{ 且 } e_i=\widetilde{A}\varDelta_i\in T_A$$

$$\therefore\quad R_+^n\subset T_A$$

即A为行广义对角占优。

必要性。由引理4和5知$det\widetilde{A}\neq 0$，并由引理6知，存在$\alpha^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_n^{(i)})^T\geqslant 0$，使得

$$\widetilde{A}\alpha^{(i)}=e_i=\widetilde{A}\varDelta_i, i=1,\cdots,n$$

$$\therefore\quad \varDelta_i=\alpha^{(i)}\geqslant 0, i=1,\cdots,n$$

证毕。

定理3 若A为行广义对角占优，则$det\widetilde{A}>0$

证明 用数学归纳法证之。

当$n=1$时，这是显然的。

设当$n=m$时定理成立，则当$n=m+1$时，由定理2知

$$\widetilde{A}nn/det\widetilde{A}\geqslant 0$$

而由归纳假设$\widetilde{A}nn=det\ \widetilde{A}mm>0$，即可得$det\widetilde{A}>0$。

推论3.1 设对某$i_0\in J_n$有$\sum\limits_{j\neq i_0}|a_{i_0 j}|\geqslant|a_{i_0 i_0}|$，而$\forall K\in J_n$，但$K\neq i_0$，均有$\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|<|a_{kk}|$，则$A$为行广义对角占优的充分必要条件是$detA>0$。

必要性是显然的，充分性可参阅[2]定理1。

推论3.2 设对某$r\in J_n$，$A^{(r,r)}$为行广义对角占优，则A为行广义对角占优的充分必要条件是$det\widetilde{A}>0$。

证明 必要性是显然的，今证其充分性。

因为$A^{(r,r)}$为行广义对角占优，故存在$(n-1)\times(n-1)$正对角阵$D^{(r,r)}=diag(d_1,\cdots,d_{r-1},d_{r+1},\cdots,d_n)$，使得$A^{(r,r)}D^{(r,r)}$为行严格对角占优。

$\forall i\in J_n$，但$i\neq r$，有

$$|a_{ii}|d_i-\sum_{j\neq r,i}|a_{ij}|d_j\triangleq\lambda_i>0$$

若$\{i\in J_n|i\neq r, a_{ir}\neq 0\}=\phi$，取$d_r=1$，否则取

$$d_r=min\left\{\frac{\lambda_i}{2|a_{ir}|}\ \middle|\ i\in J_n\cdots i\neq r, a_{ir}\neq 0\right\}$$

这样取$n\times n$正对角阵$D=diag(d_1, \cdots, d_n)$，记

$$AD=A^{(1)}=\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}$$

对$i\in J_n$，但$i\neq r$，有

$$\left|a_{ii}^{(1)}\right|-\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}^{(1)}\right|=|a_{ii}|d_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|d_j\geqslant\frac{\lambda_i}{2}>0$$

对$i=r$，有$\left|a_{rr}^{(1)}\right|-\sum_{j\neq r}\left|a_{rj}^{(1)}\right|\triangleq\delta$

若$\delta>0$，则$A^{(1)}$为行严格对角占优，否则，若$\delta\leqslant0$，则由推论3.1及引理4和5知$A^{(1)}$为行广义对角占优，从而A为行广义对角占优。

由1×1(即一阶)非零矩阵必为行严格对角占优，可以把推3.2直接推广为

定理4　A为行广义对角占优的充分必要条件是对一切$k\in J_n$，$\det\widetilde{A}_k>0$。

由定理4又可直接推得

定理5　A为行广义对角占优的充分必要条件是A为列广义对角占优。

定理6　设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{mm} \end{pmatrix}$$

其中A_{kk}为$i_k\times i_k$不可约行广义对角占优，$k=1, \cdots, m$，$i_1+\cdots i_k=n$。则A为行广义对角占优。

证明　因为A_{kk}为行广义对角占优，所以存在$i_k\times i_k$正对角阵D_{kk}，使得$A_{kk}D_{kk}$为行严格对角占优，从而取正对角阵

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{mm} \end{pmatrix}$$

则

$$A^{(1)}=AD=\begin{pmatrix} A_{11}D_{11} & \cdots & A_{1m}D_{mm} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{mm}D_{mm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n}^{(1)} & \cdots & A_{1m}^{(1)} \\ & \ddots & \\ & & A_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}$$

有$A_{kk}^{(1)}$为不可约行严格对角占优。

考虑$A_{m-1\,m-1}^{(1)}\times M_1$，则存在充分大之$M_1>0$，使得

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}_{m-1\ m-1} & A^{(1)}_{m-1\ m} \\ 0 & A^{(1)}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{M_1}^{i_{m-1}\text{个}} & & & & \overbrace{0}^{i_m\text{个}} \\ & \ddots & & & \\ & & M_1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

为行严格对角占优。

类似处理，直至最后考虑$A^{(1)}_{11} \times M_{m-1}$，取充分大之$M_{m-1} > 0$即可得之。

参 考 文 献

[1] 蒋尔雄等译，矩阵迭代分析，上海科技出版社，17—22(1960)。

[2] 林鹏程，福州大学学报，V01. 14，№. 1，1—14 (1986)。

[3] R.T.RocRafellar, Convex Analysis, 14-15(1984).

[4] 曹重光，黑龙江大学学报，№.1，36—94(1984)。

[5] 武汉大学计算数学教研室等编，计算方法，62—68(1979)。

Some Necesarry and Sufficient Conditions for Generalized Diagonal Dominant Matrix

Zhang Tianshu

(Department of Mathematics)

Abstract

Some necesarry and sufficient coditions for generalized diagonal dominance for matrices are discussed by using the determinant and the closed convex cone generated by matrices column vectors (or row vetors) .This paper, thus provides some new methoods for determining the generalized diagonal dominance in matrices. Not a few profs are constructive, which ensure the feasibility of calculation.

Keywords: generalized diagonal dominant matrix, closed convex cone