一九八八年　　福州大学学报　　№ 2
第 二 期　　JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY　　1988

P-1阶图组相容的一个算法

康　泰　　林可容
（成都师专）　（数学系）

提　　要

本文给出关于P个P－1阶图组（G_1，G_2，…，G_p）相容的一个算法．

关键词：算法，图组，相容

重构问题即Ulam猜想[1]，它的研究有多种形式。这里仅限于无 向、有限、且$P\geqslant 3$的简单图的研究。本文采用[2]的术语。

一、问题的提出

任给P个$P-1$阶图$G_i(i=1,2,\cdots,P)$，是否存在P阶图G，使G的主子图就是$G_i(i=1,2,\cdots,P)$？如果G存在，则称这P个$P-1$阶图$G_i(i=1,2,\cdots,P)$组成的图组$(G_1,G_2,\cdots,G_P)$是相容的或可重构的。本文对这一问题进行研究，给出P个$P-1$阶图组$(G_1,G_2,\cdots,G_P)$相容 的 一个算法。

二、定义与符号

定义1　矩阵$Q_G=(q_{ij})_{P\times P}$叫做(P,q)图G的Ulam矩阵，其中

$$q_{ij}=\begin{cases}|X(G-\{v_i,v_j\})|, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases}$$

定义2　满足条件

$$\sum_{K=1}^{P}q_{iK}\geqslant\sum_{K=1}^{P}q_{jK}\quad(i<j)$$

的Ulam矩阵叫做本原Ulam矩阵

令　$C_i=\sum_{K=1}^{P}q_{iK}\quad(i=1,2,\cdots,P)$

如果$C_1=\cdots=C_{L_1}>C_{L_1+1}=\cdots=C_{L_2}>\cdots>C_{L_{s-1}+1}=\cdots=C_{L_s}$，则由 本 原

本文1986年12月30日收到。

Ulam矩阵得到的分块阵

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1s} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2s} \\ \cdots\cdots \\ Q_{s1} & Q_{s2} & \cdots & Q_{ss} \end{pmatrix}$$

叫做G的分块Ulam矩阵。

定义3 对任一满足条件

$$|X(G_1)|\geqslant|X(G_2)|\geqslant\cdots\geqslant|X(G_P)|$$

的P—1阶图组$(G_1,\cdots,G_P)$，令$\bar{q}_{i1}$，$\bar{q}_{i2}$，…，$\bar{q}_{i\,i-1},\bar{q}_{i\,i+1},\cdots$，$\bar{q}_{iP}$为$G_i(i=1,2,\cdots,P)$的主子图($P$—2阶)的线数序列，且

$$\bar{q}_{i1}\geqslant\cdots\geqslant\bar{q}_{i\,i-1}\geqslant\bar{q}_{i\,i+1}\geqslant\cdots\geqslant\bar{q}_{iP}\quad(i=1,2,\cdots,P)$$

则P阶矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_{12} & \cdots & \bar{q}_{1P} \\ \bar{q}_{21} & 0 & \cdots & \bar{q}_{2P} \\ \cdots\cdots \\ \bar{q}_{P1} & \bar{q}_{P2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

称为P—1阶图组$(G_1,\cdots G_P)$的相容矩阵。

类似于定义2，可得Q的分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdots & \bar{Q}_{1s} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \cdots & \bar{Q}_{2s} \\ \cdots\cdots \\ \bar{Q}_{s1} & \bar{Q}_{s2} & \cdots & \bar{Q}_{ss} \end{pmatrix}$$

其中$\bar{Q}_{ii}$是r_i阶方阵。$r_i=L_i-L_{i-1}(i=1,2,\cdots,S;\ L_0=0)$。该矩阵称为图组$(G_1,\cdots,G_P)$的分块相容阵。

定义4 方阵T称为置换矩阵，如果T的每一行每一列都有且仅有一个元素为1，而其余元素均为零。

三、引　　理

引理1 如果

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdots & \bar{Q}_{1s} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \cdots & \bar{Q}_{2s} \\ \cdots\cdots \\ \bar{Q}_{s1} & \bar{Q}_{s2} & \cdots & \bar{Q}_{ss} \end{pmatrix}$$

是G的分块Ulam矩阵，其中Q_{ii}是r_i阶方阵，则

(1) $q=\sum\limits_{i=1}^{P}\sum\limits_{j=1}^{P}q_{ij}/[(P-2)(P-3)]$；($q$为$G$的边数)

(2) $deg_G v_i = q - [\sum_{K=1}^{P} q_{iK}/(P-3)]$;

(3) Q_{ij}的元素（除去$i=j$时主对角线上的元素为0外）为

$$q-(d_{L_i}+d_{L_j})+\delta$$

其中：P、q分别为G的顶点数和边数，$d_i = deg_G v_i$，$\delta=0$或1，L_i与L_j的值见定义2。

证：（略）。

引理2　P—1阶图组$(G_1, G_2, \cdots, G_P)$相容，则其相容矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{13} & \cdots & \bar{q}_{1P} \\ \bar{q}_{21} & 0 & \bar{q}_{23} & \cdots & \bar{q}_{2P} \\ \cdots\cdots & & & & \\ \bar{q}_{P1} & \bar{q}_{P2} & \bar{q}_{P3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

满足条件：

a. $q=\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P}\bar{q}_{ij}/[(P-2)(P-3)]$　为正整数；

b. $d_i = q - \sum_{K=1}^{P}\bar{q}_{iK}/(P-3)$　为正整数。

证　设$(G_1, \cdots, G_P)$是相容的，G是它的任意重构图，其Ulam矩阵为$Q_G=(q_{ij})_{P\times P}$，则$G_i (i=1,2,\cdots,P)$是G的主子图。因此

$$\bar{q}_{i1}, \cdots, \bar{q}_{i\,i-1}, \bar{q}_{i\,i+1}, \cdots, \bar{q}_{iP}$$

仅是$q_{i1}, q_{i2}, \cdots, q_{i\,i-1}, q_{i\,i+1}, \cdots, q_{iP}$的一个重新排列。所以a和b中的数都是正整数，因为它们分别等于重构图G的边数和顶点的度数。

引理3　P—1阶图组$(G_1, G_2, \cdots, G_P)$相容，则它的相容阵可以分块成满足下列条件的分块相容阵：

(i) 通过$\bar{Q}_{ij}(i, j=1, 2, \cdots P)$的行的元素重排得到$Q_{ij}$，使$Q_{ij}=Q'_{ji}$，且当$i=j$时，主对角线上的元素全为零。

(ii) Q_{ij}的元素（除去$i=j$时，主对角线上的元素为零外）为

$$q-(d_{L_i}+d_{L_j})+\delta \quad (\delta=0\text{或}1)$$

证　不失一般性，设

$$|X(G_1)|=\cdots=|X(G_{L_1})|>|X(G_{L_1+1})|=\cdots=|X(G_{L_2})|>\cdots$$
$$>|X(G_{L_{s-1}+1})|=\cdots=|X(G_{L_s})| \qquad (1)$$

令G为$(G_1, \cdots, G_P)$的重构图并设其顶点$v_1, \cdots, v_P$满足

$$G-v_i \cong G_i \qquad (2)$$

由(2)式知

$$|X(G)|-deg_G v_i=|X(G_i)| \qquad (3)$$

由(1)、(3)得

$$deg_G v_1=\cdots=deg_G v_{L_1}<deg_G v_{L_1+1}=\cdots=deg_G v_{L_2}<\cdots$$
$$<deg_G v_{L_{s-1}+1}=\cdots=deg_G v_{L_s} \tag{4}$$

由(2)式知，$G-v_i$的主子图的线数序列是G_i的主子图的线数序列的重排。所以，当$G-v_i$的主子图的线数序列按递减的方式重排时，若在第i个位置插入一个零，就成为$(G_1, \cdots, G_P)$的相容阵的第i行。

令$L_0=0$及 $V_i=\{v_{L_{i-1}+1}, v_{L_{i-1}+2}, \cdots, v_{L_i}\}$，$(i=1, 2, \cdots, S)$ (5)

对于任一固定的i及$v_L\in V_j$，$v_m\in V_K(L\neq i, m\neq i$且$L\neq m)$

① 当$j=K$时，

$$||X(G-\{v_i, v_L\})|-|X(G-\{v_i, v_m\})||$$
$$=\begin{cases}0 & v_i\text{与}v_L\text{、}v_m\text{都邻接或都不邻接，}\\ 1 & \text{其它。}\end{cases} \tag{6}$$

② 当$j\neq K$时，不妨设$j<K$，则

$$|X(G-\{v_i, v_L\})|\geqslant|X(G-\{v_i, v_m\})| \tag{7}$$

并且等号仅当$j=K-1$且$v_i \mathrm{adj} v_L$而$v_i \mathrm{nadj} v_m$时才可能成立。

由(1)式知，$(G_1, G_2, \cdots, G_P)$的相容阵分块后应为

$$\begin{pmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdots & \bar{Q}_{1s}\\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \cdots & \bar{Q}_{2s}\\ \cdots\cdots & & & \\ \bar{Q}_{s1} & \bar{Q}_{s2} & \cdots & \bar{Q}_{ss}\end{pmatrix} \tag{8}$$

这里$\bar{Q}_{ij}$是$(L_i-L_{i-1})\times(L_j-L_{j-1})$矩阵。它的第$m$行$(1\leqslant m\leqslant L_i-L_{i-1})$恰是相容阵的第$L_{i-1}+m$行的一段；从相容阵的第$L_{j-1}+1$列起到第$L_j$列止。由(6)、(7)式知，除属于相容阵对角线上的元外，这些元素为

$$q-(deg_G v_{L_{i-1}+m}+deg_G v_{L_{j-1}+K})+\delta$$
$$=q-(deg_G v_{L_i}+deg_G v_{L_j})+\delta$$
$$=q-(d_{L_i}+d_{L_j})+\varrho \tag{9}$$

其中：

$$\delta=\begin{cases}1, & \text{若}v_{L_{i-1}+m}\,adj\,v_{L_{j-1}+K},\\ 0, & \text{若}v_{L_{i-1}+m}\,nadj\,v_{L_{j-1}+K}\text{。}\end{cases}$$

(9)式说明只须对(8)式中每分块矩阵的行的元素进行重排，就可使得矩阵的第i行第j列的元素满足：当$i=j$时为零；当$i\neq j$时为$|X(G-\{v_i,v_j\})|$。从而新的相容阵是一个对称矩阵。因此

$$Q_{ij}=Q_{ji}^t$$

结合(9)式，引理得证。

由引理3知，对任意给定的一个$P-1$阶图组$(G_1, G_2, \cdots, G_P)$，通过将它的相容阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{13} & \cdots & \bar{q}_{1P} \\ \bar{q}_{21} & 0 & \bar{q}_{23} & \cdots & \bar{q}_{2P} \\ \cdots\cdots & & & & \\ \bar{q}_{P1} & \bar{q}_{P2} & \bar{q}_{P3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的行的元素的部分重排（即只是对分块阵中的块$\bar{Q}_{ij}$的行的元素重排）。若能得到对称的分块矩阵

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1s} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2s} \\ \cdots\cdots & & & \\ Q_{s1} & Q_{s2} & \cdots & Q_{ss} \end{pmatrix}$$

其中Q_{ii}是r_i阶方阵。则我们可按下法构造图$G=(V,\ X)$：

令$V=\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_P\}$，且

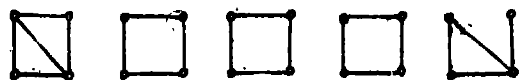
$$v_L adj v_m \Longleftrightarrow q_{Lm}=q-(d_{L_i}+d_{L_j})+1$$

这里$q_{Lm}\in Q_{ij}$(q，d_{L_i}，d_{L_j}意义同前)。

我们称按上法构造的图$G=(V,\ X)$为$P-1$阶图组$(G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_P)$的一个相容图。有多少种不同的方法将相容阵排成对称的分块矩阵，就有多少个相容图(不一定是同构的)。显然有

引理4　若$P-1$阶图组$(G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_P)$是相容的，则以它们为主子图组的图一定是它的一个相容图。

例1　图1的4阶图组$(G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4,\ G_5)$是不相容的。因为虽然有



G_1　G_2　G_3　G_4　G_5

图1

$$q=42/[(5-2)(5-3)]=7,$$

$$d_1=q-\sum_{K=1}^{5}\bar{q}_{1K}/(5-3)$$

$$=7-10/2=2。$$

类似可得$d_2=d_3=d_4=d_5=3$，但它的相容阵

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_{12} & \cdots & \bar{q}_{15} \\ \bar{q}_{21} & 0 & \cdots & \bar{q}_{25} \\ \cdots\cdots & & & \\ \bar{q}_{51} & \bar{q}_{52} & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

却不可能通过行的元素的部分重排得到对称的分块矩阵（注意：其中只有一个1又不在对角线上）。

例2　图2所示的4阶图组$(G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_5)$是相容的。这是因为由相容阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图2

经过行的部分重排变为对称分块阵

$$\left(\begin{array}{c:cccc} 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hdashline 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{对应的邻接矩阵为} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

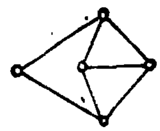


图3

由此可得到相容图（图3），它就是已知图组的一个重构图。

四、P-1阶图组相容的一个算法

定理 $P-1$阶图组$(G_1, \cdots, \cdots G_P)$相容的充要条件是该图组的分块相容阵满足以下条件

(i) $q=\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P}\bar{q}_{ij}/[P-2)(P-3)]$为正整数；

(ii) $d_i=q-\sum_{j=1}^{P}\bar{q}_{ij}/(P-3)$为正整数；

(iii) $\bar{Q}_{ij}$的元素（除$i=j$时，主对角线上的元素为0外）是

$q_{Lm}=q-(d_{L_i}+d_{L_j})+\delta$ （$\delta=0$或1，$q_{lm}\in\bar{Q}_{ij}$）

(iv) 存在一个相容图，以G_1，…，G_P为其主子图组。

该定理的正确性是显然的，证略。

据此定理，得$P-1$阶图组$(G_1, \cdots, G_P)$相容性的算法如下：

① 由$(G_1, \cdots, G_P)$作出分块相容阵；

② 计算q的值，若q非正整数，转⑧；

③ 计算$d_i(i=1, 2, \cdots, P)$，若存在$d_K(1\leqslant K\leqslant P)$非正整数，转⑧；

④ 检查$\bar{q}_{ij}$的元素，若有一个元素不满足：$q_{Lm}=q-(d_{L_i}+d_{L_j})+\delta$（$\delta=0$或1）转⑧；

⑤ 找出相容阵的集合F，若$F=\phi$，转⑧；

⑥ 对F中的每一个相容阵构造相容图，若有一个相容图以$(G_1, \cdots, G_P)$为主子图组，则转⑦，否则转⑧；

⑦ 给出相容的标志，转⑨；

⑧ 给出不相容的标志；

⑨ 结束。

参 考 文 献

[1] L. W. Beineke, Selected Topics in Graph Theory, Academic Press,(1978).
[2] 李慰萱，图论，湖南科技出版社，(1980)。

An Algorithm of the Compatibility for the System of P Graphs with Order P-1

Kan Tai
(The Normal College of Chengdu)
Lin Kerong
(Department of Mathematics)

Abstract

This paper presents an algorithm of the compatibility for the system(G_1,… G_P)of p graphs with order $p-1$.

Keywords: algorithm, compatibility, graphs