一九八八年 福州大学学报 No 2
第 二 期 JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY 1988

关于顶点凝聚度的几个定理

郭玉端

（数学系）

提　　要

本文研究图G的顶点v是负点(C(v)=K(G)-K(G-v)< 0，零点(C(v)=0)、正点(C(v)>0)的充要条件。

关键词：凝聚度，顶点子集的邻集，左、右邻集，单邻点，k一单邻点，斥负点，斥零点

一、引　言

J.Akiyama等在文[1]中引进了图的顶点v的凝聚度概念，并研究图的顶点v是负点的必要条件以及具有负点v的图，它的其它任意点u是正点的充要条件；本文研究图G的顶点v是负点的充要条件，并研究没有负点的图，其顶点u是零点、正点的充要条件。

本文讨论n阶简单连通图G，以$V(G)$表示G的顶点集，$K(G)$表示G的连通度，$d_G(v)$表示G中顶点v的度，$N_G(v)$表示G中与顶点v相邻的顶点集合，$N_G(W)$表示与图G的顶点集合W的顶点相邻的所有顶点的集合。

二、定理及其证明

在叙述定理及其证明之前，先建立下列几个概念。

定义1　设$V(G)=Y\cup X$，$X\neq\phi$，$Y\neq\phi$，$X\cap Y=\phi$，$X_1\subset X$，与图$G-Y$的顶点集合X_1的顶点相邻的所有顶点的集合X_2，称它为X_1的右邻集。

类似的可定义左邻集。左、右邻集都具有局部性。

定义2　设W与W'是G中两个不交的非空顶点子集，如$v\in W$，$v'\in W'$，且v只与W'中的一个顶点v'相邻，则称顶点v'为顶点v在W'中的单邻点。W在W'中的所有单邻点的集合S，称为W在W'中的单邻集。

定义3　设v_1，v_2，…，$v_k\in W, V'\in W'$，如v_1，v_2，…，v_k在W'中的单邻点均是v'，则称v'为k—单邻点。W在W'中所有的k—单邻点的集合S_k，称为W在W'中的k—单邻集。

定义4　设W是G的一个最小断集，$V(G)=Y\cup X, X\neq\phi, Y\neq\phi$，$X\cap Y=\phi$，$W\subset X$，$W$的右邻集为$X_1$，它们的相邻顶点数为$r_0=|W|=K(G)$，$X_1$的右邻集为$X_2$，相邻的顶点数为$r_1\geqslant K(G)+1, X_2$的右邻集为$X_3$，相邻的顶点数为$r_2\geqslant K(G)+1$；因为$V(G)$是有限集，所以存在一个正整数$t$，使得$X_{t-1}$的右邻集为$X_t$，相邻的顶点数为$r_{t-1}\geqslant K(G)+1$；$W$的

本文1986年12月30日收到。

左邻集为Y_1，相邻的顶点数为$l_0=|W|=K(G)=r_0$，Y_1的左邻集为Y_2，相邻的顶点数为$l_1\geqslant K(G)+1$，$\cdots Y_{s-1}$的左邻集为Y_s，相邻的顶点数为$l_{s-1}\geqslant K(G)+1$，以上的划分称为对$V(G)$进行以最小断集W为基的划分，记为$V(G)=Y_s\cup\cdots\cup Y_1\cup W\cup X_1\cup\cdots\cup X_t$，此时$K(G)=\min\{\delta(G),\ r_0,\ r_1,\ \cdots r_{t-1},\ l_0,\ ,\ l_{s-1}\}$。

定义5　设u是图$G-v(v\in V(G))$最小断集中的一点，如$u\in N_G(v)$且$K(G-v)\leqslant K(G)$，则称u为图G的斥负点。

限于篇幅，以下引理的证明从略。

引理　设$v\in V(G)$，如$N_G(v)$含有图G的斥负点，则v不是图G的负点。

定理1　设$v\in V(G)$，则v是图G的负点的充要条件是：

(1)$N_G(v)$是G的唯一最小断集；

(2)$N_G(v)$不含G的斥负点；

(3)$N_G(v)$中的任意点x_N均有$d_G(x_N)\geqslant K(G)+2$。

证明　必要性：设v是图G的负点，依[1]中定理A得知$N_G(v)$是图G的唯一最小断集。又因为v是G的负点，则有$K(G-v)>K(G)$，从而图$G-v$中的任意点x_i，都有$d_{G-v}(x_i)\geqslant K(G)+1$，否则，如有一点$x_j$，$d_{G-}v(x_j)=K(G)=|N_{G-v}(x_j)|\geqslant K(G-v)$，这与$v$是图$G$的负点的假设相矛盾。由此可知$N_G(v)$中任意点$x_N$，在图$G-v$中的度$d_{G-v}(x_N)\geqslant K(G)+1$，从而$d_G(x_N)\geqslant K(G)+2$。

$N_G(v)$不含G的斥负点u，因为如$N_G(v)$含有G的斥负点u，则依斥负点定义有$K(G-v)\leqslant K(G)$，此与假设$K(G-v)>K(G)$相矛盾，故$N_G(v)$不含G的斥负点。

充分性：设$N_G(v)$是G的唯一最小断集，则有$|N_G(v)|=K(G)$，对$V(G)$进行以$N_G(v)$为基的划分，移去顶点v后，$N_G(v)$中各顶点的度减少一，其余各顶点的度及其相邻关系不变，即图$G-v$的结构与图G的结构除$N_G(v)$中的顶点在G中与v相邻，而在图$G-v$中不与v相邻这一点不相同外，其余结构均相同。下面证明$K(G-v)>K(G)$，即证明v是图G的负点。

设图$G-v$的最小断集为W，可能$W=N_{G-v}(x)$（其中$x\in V(G)-\{v\}$），亦可能$W\neq N_{G-v}(x)$。

如图$G-v$的最小断集$W=N_{G-v}(x)$（其中$x\in V)(G)-\{v\}$），分两种情况讨论：

a．如$x\in N_G(v)$，由已知条件，$d_G(x)\geqslant K(G)+2$，移去v后，$N_G(v)$中任何顶点的都减少一，即$d_{G-v}(x)\geqslant K(G)+1$，由此得知$K(G-v)=|N_{G-v}(x)|=d_{G-v}(x)\geqslant K(G)+1$，即$K(G-v)>K(G)$。

b．如$x\in V(G)-N_G(v)-\{v\}$，由于$N_G(v)$是G的唯一最小断集，故$V(G)-N_G(v)-\{v\}$中任何顶点x的度均大于或等于$K(G)+1$，即$d_G(x)\geqslant K(G)+1$，移去顶点v后，$V(G)-N_G(v)-\{v\}$中各顶点的度不变，即$d_{G-v}(x)\geqslant K(G)+1$，从而$|N_{G-v}(x)|=d_{G-v}(x)=K(G-v)\geqslant K(G)+1$，即$x(G-v)>K(G)$。

综上所述，当图$G-v$的最小断集$W=N_{G-v}(x)$时（其中$x\in V(G)-\{v\}$），$K(G-v)>K(G)$。

如图$G-v$的最小断集$W\neq N_{G-v}(x)$，（其中$x\in V(G)-\{v\}$），分两种情况讨论：

a．如W含有$N_G(v)$的顶点u，则$|W|=K(G-v)>K(G)$，因为如$K(G-v)\leqslant K(G)$，则u是G的斥负点，此与假设矛盾。

b. 如W不含有$N_G(v)$的顶点，则$|W|=K(G-v)>K(G)$，证明如下：

因为G是连通图，$N_G(v)$是G的唯一最小断集，故v不是G的断点，因此$G-v$是连通图，由于W是图$G-v$的最小断集，所以$G-v-W$是不连通图，而$G-v-W=G-W-v$，因为v不是G的断点，显然它亦不是$G-W$的断点'由上述划分可知$N_G(v)$的左邻集只有一点v，而v没有左邻集，故v不可能是$G-W$的断点），由此推出$G-W$是不连通图，即W是图G的断集，因此$|W|\geqslant K(G)$，但$|W|\neq K(G)$，因为如$|W|=K(G)$，则W是图G的最小断集，这与$N_G(v)$是图G的唯一最小断集的假设相矛盾，所以$|W|>K(G)$，即$K(G-V)>K(G)$。

综上所述，得知顶点v是图G的负点。

定义6　设u是图$G-v$的最小断集中的一点，如$u\in N_G(v)$，且$K(G-v)\neq K(G)$，则称u是图G的斥零点。

引理1　设$v\in V(G)$，如$N_G(v)$含有图G的斥零点，则v不是图G的零点。

以下总是假设划分中的X_i与X_{i+1}（或Y_j与Y_{j+1}）中只有单邻点。

引理2　设W与W'是图G中两个不交的非空顶点子集，并设W'是W的邻集，且$v'\in W'$，$v\in W$，v在W'中的单邻点为v'，则集合$W'-\{v'\}$中没有顶点与v相邻。如v'是k—单邻点，则集合$W'-\{v'\}$中设有顶点与v_1，v_2，…，v_k相邻。（其中v_1，$v_2\cdots v_K\in W$，它们在W'中的单邻点都是v'）。

引理3　设$N_G(v)$是图G的唯一最小断集，则$N_G(v)$在其右邻集中没有单邻点。

引理4　设W是图G的唯一最小断集（$K\neq N_G(x_i)$，$x_i\in V(G)$），则W在其邻集中没有单邻点。

引理5　设图G至少有两个最小断集，可设为$N_G(v)$与W（$W\neq N_G(x_i)$，$x_i\in V(G)$）则

1. 如x_1是$N_G(v)$在其右邻集的单邻点，则x_1是图G的正点。

2. 如x_1是W在其邻集中的单邻点，则x_1是图G的正点。

3. 当$N_G(v)$中至少有一点x_N，$d_G(x_N)=K(G)$时，$N_G(v)$的$K(G)$—单邻点v亦是图G的正点。

4. 当任意$x_N\in N_G(v)$，$d_G(x_N)\geqslant K(G)+1$时，且$N_G(v)$不含图G的斥零点，则$N_G(v)$的$K(G)$—单邻点v是图G的零点。

引理6　设W_1，W_2，…，W_k是图G的最小断集，（$W_i\neq N_G(x_i)$，$x_i\in V(G)$），则各W_i在其邻集中的单邻点（或k—单邻点）都是图G的正点（$k\geqslant 2$，$i=1$，2，…，k）。

定理2　设G至少有两个最小断集，形如$N_G(v)$的最小断集（$v\in V(G)$）中，至少有一顶点$v_i\in N_G(v)$，$d_G(v_i)=K(G)$，则图G的顶点u是正点的充要条件是$u\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_S$（其中$W_j$是图$G$的最小断集，$W_0=N_G(v)$，$m\geqslant 1$，$W_S$是所有$W_j$（$j=0$，1，…，$m$）在其邻集中的单邻点与$k$—单邻点的集合。）

证明　充分性：如$u\in W_S$，由引理5(1，2，3)得知u是图G的正点。

如$u\in W_j$（$j=0$，1，…，m），因为W_j是图G的最小断集，则$W_j-\{u\}$是图$G-u$的断集，而$K(G-u)\leqslant|W_j-\{u\}|=|W_j|-1<|W_j|=K(G)$，即$u$是图$G$的正点。

必要性：对$V(G)$进行以任意最小断集W_j为基的划分，W_j的右邻集为X_{1j}，X_{1j}的右

邻集为X_{2i}，…，$X_{k_{i-1}j}$的右邻集为X_{k_ij}(k_i是某个正整数)。

设u是G的正点，而$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_S$，则$u\in V(G)-\left[\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s\right]$。可设$u\in X'_{ij}\subset X_{ij}$，($X'_{ij}$表示不包含任何最小断集的点，亦不包含$W_s$的点的点集)，由此推知，$X'_{ij}$中各顶点$x'_j$的度$d_G(x'_j)\geqslant K(G)+1$，因为如有一点$x'_j$，$d_G(x'_j)=K(G)$，则$N_G(x'_j)$是$G$的某个最小断集$W_j$，于是$x'_j$是$N_G(x'_j)$的$K(G)$—单邻点，从而$x'_j\in W_s$，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$的假设相矛盾。移去$u$后，对$X_{i-1,j}$，$X_{ij}$，$X_{i+1,j}$的影响讨论如下：

a. 移去u后，$X_{i-1,j}$与X_{ij}相邻顶点数减少一时，即当$r'_{i-1}=r_{i-1}-1$时，此时，$r_{i-1}\geqslant K(G)+1$，即$r'_{i-1}\geqslant K(G)$。因为如$r_{i-1}=K(G)$，则必有一个最小断集$W_k\subset X_{i-1,j}$，或$|X_{ij}|=K(G)$。

如有$W_k\subset X_{i-1,j}$中，而移去u后，$X_{i-1,j}$与X_{ij}相邻顶点数减少一，则u必是W_k中某一点在X_{ij}中的单邻点，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$的假设相矛盾，故$r'_{i-1}\geqslant K(G)$。

如$|X_{ij}|=K(G)$，则X_{ij}必是G的某个最小断集W_l，由于$u\in X'_{ij}\subset X_{ij}=W_l$，即$u\in W_l$，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$的假设相矛盾，故$r'_{i-1}\geqslant K(G)$。

b. 移去u后，$X_{i-1,j}$与X_{ij}相邻的顶点数不变，此时$r_{i-1}\geqslant K(G)$，即$r'_{i-1}=r_{i-1}\geqslant K(G)$。

$X_{i-1,j}$中与u相邻的顶点x_{i-1}的度减少一，即$d_{G-u}(x_{i-1})\geqslant K(G)$(因为如$d_G(x_{i-1})=K(G)$，则$N_G(x_{i-1})$是$G$的某个最小断集$W_t$，由于$u$与$x_{i-1}$相邻，所以$u\in N_G(x_{i-1})$，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$的假设相矛盾)。$X_{ij}$中与$u$相邻的顶点$x_i$的度减少一，即$d_{G-u}(x_i)\geqslant K(G)$，(因为如$d_G(x_i)=K(G)$则$N_G(x_i)$是$G$的某个最小断集$W_h$，由于$u$与$x_i$相邻，所以$u\in N_G(x_i)$，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$的假设相矛盾)。如$u$是相邻点，此时$u$必属于相邻点数$\geqslant K(G)+1$的$X_{ij}$(否则，如$u\in X_{ij}$，而$|X_{ij}|=K(G)$，则$X_{ij}$必定是$G$的某个最小断集$W_j$，此与$u\bar{\in}\bigcup_{j=0}^{m}W\cup W$，相矛盾)。故移去$u$后，$X_{ij}$与$X_{i+1,j}$的相邻点数减少一，则$r'_i\geqslant K(G)$。如$u$不是相邻点，则移去$u$后，$X_{ij}$与$X_{i+1,j}$的相邻点数仍为$r'_i=r_i\geqslant K(G)$；$X_{i+1,j}$中与$u$相邻的顶点$x_{i+1}$的度减少一，即$d_{G-u}(x_{i+1})\geqslant K(G)$，(因为如$d_G(x_{i+1})=K(G)$，则$N_G(x_{i+1})$是$G$的某

个最小断集W_{i+1}，由于u与x_{i+1}相邻，故$u\in N_G(x_{i+1})$，此与$u\notin\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_S$的假设相矛盾)。

综上所述，推知$G-u$的任意断集X，所含顶点的个数$|X|=r'_i\geqslant K(G)$。

另一方面，因为图G至少有两个最小断集，设为W_j，W_k，又因为假设$u\in\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$。如$u$不与$W_k$中的点相邻，则移去$u$后，$W_k$为图$G-u$的断集，而$|W_k|=K(G)$；如$u$与$W_k$中某个顶点$x_k$相邻，则移去$u$后，点$x_k$的度减少一，即$d_{G-u}(x_k)\geqslant K(G)$，由假设得知$u$不是$W_k$中某个点$x_k$的单邻点，因此图$G-u$的断集仍为$W_k$，而$|W_k|=K(G)$。

综上所述，推知图$G-u$至少有一最小断集W_k，于是$K(G-u)=|W_k|=K(G)$，即u是图G的零点，此与题设u是图G的正点相矛盾，故$u\in\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup W_s$。

限于篇幅，以下推论的证明从略。

推论1　设G至少有两个最小断集，$N_G(v)$是其中之一，且对任意$x_N\in N_G(v)$，$d_G(x_N)\geqslant K(G)+1$，且$N_G(v)$不含G的斥零点，则图G的顶点u是正点的充要条件是$u\in\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup[W_s-\{v\}]$。

推论2　设图G至少有两个最小断集，$N_G(v)$是其中之一，对任意$x_N\in G_G(v)$，$d_G(x_N)\geqslant K(G)+1)$，且$N_G(v)$不含图$G$的斥零点，则图$G$的顶点$u$是零点的充要条件是$u\in V(G)-\left\{\bigcup_{j=0}^{m}W_j\cup[W_s-\{v\}]\right\}$。

推论3　设$N_G(v)$是G的唯一最小断集，则图G的顶点u是正点的充要条件是$u\in N_G(v)$。

此推论比[1]中定理A的推论强了一些。

定理3　设$W_1,W_2,\cdots,W_m$是图G的最小断集，且$W_i\neq N_G(x_i)$，$x_i\in V(G)$，W_s是所有$W_i(i=1,2,\cdots,m)$在其邻集中的单邻点与k—单邻点的集合，则图G的顶点u是正点的充要条件是$u\in\bigcup_{j=1}^{m}W_j\cup W_s$，其中$m\geqslant 2$。

证：仿定理2的证法即可得证。

推论　设W_1，W_2，…，W_m是图G的最小断集，且$W_i\neq N_G(x_i)$，$x_i\in V(G)$，W_s是所有$W_i(i=1,2,\cdots,m)$在其邻集中的单邻点与k—单邻点的集合，则图G的顶点u是零点的充要条件是$u\in V(G)-\left[\bigcup_{j=1}^{m}W_j\cup W_s\right]$，其中$m\geqslant 2$。

参考文献

[1] J.Akiyama et al.The cohesiveness of a point of a graph, Networks, vol. 11, 65—68(1981).

Several Theorems of Cohesiveness of a point

Guo Yuduan
(Department of Mathematics)

Abstract

Studied in this paper are the respective necessary and sufficient conditions, for point v of graph G being in a negative point ($C(v)<0$), a zero point ($C(v)=0$), and a positive point.

Keywords: cohesiveness, neighbour set of a subset of point, left, right neighbour set, single neighbour point, k-single neighbour point, excluded negative point, excluded zero point