福州大学学报
一九八三年 第二期
JOURNAL OF FUZHOU UNIVERSITY
№ 2 1983

概周期微分方程局部綫性化

张剑峰
（数学系）

摘　　要

本文把P. Hartman关于定常的拟线性系统局部线性化的结果推广到概周期拟线性非定常系统。证明中利用了G. R. Sell关于非定常系统的斜积理论以及林振声关于概周期线性系统广义特征指数异于零则具有指数型二分法的理论。

§1　引　言

*P. Hartman*于1963年在〔1〕中对满足一定条件的拟线性定常系统

(1·1)　$$\xi' = E\xi + F(\xi)$$

得到了局部线性化的结果。

所谓局部线性化，简单地说即可找到从系统(1·1)的$\xi=0$的邻域到系统

(1·2)　$$u' = Eu$$

的$u=0$邻域的拓扑映射P，使得$L^tP=PT^t$。其中T^t为映射$x\to x^t=\xi(t,x)$，$\xi(t,x)$为(1.1)的解，满足$\xi(o,x)=x$．而L^t为映射$u\to u^t=\eta(t,u)$，$\eta(t,u)$为(1·2)的解，满足$\eta(o,u)=u$.

本文将应用林振声的二分法理论（参见〔2〕）和*G.R.Sell*的斜积理论（参见〔3〕），在适当条件下把*P. Hartman*教授的结果推广到概周期拟线性非定常系统。

§2　准备工作

为完成本文的证明，先作些准备工作。

如所周知，古典的动力体系是这样定义的（参见〔4〕）：设W为拓扑空间，R为实数集，映射π：$W\times R\to W$满足下列条件：

（i）$\pi(w,0)=w$，　　　　$w\in W$；

（ii）$\pi(\pi(w,s),\ t)=\pi(w,s+t)$，　　$t,s\in R$；

（iii）π是连续的。

本文1982年11月13日收到。

对于定常系统微分方程所定义的曲线，可以看作上述 π- 流线：$\{\pi(w,t)\mid t\in R\}$。但是对非定常系统微分方程所定义的曲线不满足 π- 流线的意义。为此，本文引进满足一定条件的非定常系统微分方程 $x'=f(x,t)$ 的 π- 流线的定义，就是 G.R.Sell 所说的斜积。

设映射 f：$R^n\times R\to R^n$，R^n 为 n 维欧氏空间，R 为实数集。若 f 满足 (i) 是连续的，(ii) $x'=f(x,t)$ 的解具有唯一性，则称 f 为可容函数。设 $C=C(R^n\times R,R^n)$ 表示所有在 $R^n\times R$ 上定义，在 R^n 上取值的连续函数集合。若可容函数 $f\in C$，使得 $x'=f(x,t)$ 的每一个解对 R 上的一切 t 都连续，则称 f 为满足全局存在性质。

定义 设 F 是满足全局存在性质的可容函数 f 的平移空间：$F=\{f\tau;\ \tau\in R, f\tau(x,t)=f(x,\tau+t)\}$，其中 $f(x,t)$ 设为 t 的一致概周期向量函数。对 F 取一致拓扑，使 F 构成致密的空间。令度量空间 $X=R^n\times F$ 为乘积空间。现引进映射 π：$X\times R\to X$，而 π 由下式定义

(2·1) $\qquad \pi(x,f,\tau)=(\varphi(x,f,\tau),\ \sigma(f,\tau))=(\varphi(x,f,\tau),\ f\tau)$.

其中 $\varphi(x,f,\tau)$ 为 $x'=f(x,\tau)$ 的解，$\varphi(x,f,0)=x$. 于是称 $\pi=(\varphi,\sigma)$ 为 (φ,σ) 的斜积。

可以验证 (2·1) 式定义的映射 π 满足了上述古典动力体系的三个要求，由于 F 的一致拓扑，故此动力体系是连续的，证明此处从略（参见[3]）

这样，定义了一个 X 上的动力体系。方程 $x'=f(x,t)$ 的解 $\varphi(x,f,t)$，$\varphi(x,f,0)=x$ 满足 π- 流线的意义。那么，对于本文 §3 即将论及的概周期微分方程 (3·1)、(3·2) 亦可定义上述映射 π，使它们构成新意义下的动力体系。

设 (3·2) $\ x'=A(t)x$ 的基本方阵为 $X(t)$，$X^{-1}(t)=Z(t)$，则 (3·1) $x'=A(t)x+F(x,t)=f(x,t)$ 的解可表达为

(2·2)
$$x^t=\varphi(x,f,t)=$$
$$=X(t)Z(0)x+\int_0^t X(t)Z(\tau)F(\varphi(x,f,\tau),\ \tau)d\tau$$
记
$$=X(t)x+W(t,x),$$
其中 $X(0)=I$，$X^{-1}(0)=Z(0)=I$.

而以 $x^s=\varphi(x,f,s)$ 为始点的 (3·1) 的解 $(x^s)^t$ 则可由 $\pi(\pi(x,f,\tau),t)=\pi(x,f,\tau+t)$，即知
$$(x^s)^t=\varphi(x^s,f_s,t)=\varphi(\varphi(x,f,s),\ f_s,t)=\varphi(x,f,s+t).$$
其具体表达式为

(2·3)
$$(x^s)^t=X(s+t)Z(s)x^s+\int_0^t X(s+t)Z(s+\tau)F(x^{s+\tau},s+\tau)d\tau.$$

现在设 T^t 为系统 (3·1) 的始值 x 到该系统的解 $\varphi(x,f,t)$ 之映射，即 T^t：$x\to x^t=\varphi(x,f,t)=T^t(x)$. 同样，设 L^t 为系统 (3·2) 的始值 u 到该系统的解 $\psi(u,g,t)$ 之映射，即 L^t：$u\to u^t=\psi(u,g,t)=L^t(u)$. 这里 $f(x,t)=A(t)x+F(x,t)$，$g(u,t)=A(t)u$.

由上述即知
$$T^tT^s(x)=(x^s)^t=\varphi(x^s,fs,t)=\varphi(x,f,t+s)=x^{s+t}=T^{t+s}(x),$$
则得 $T^tT^s(x)=T^{t+s}(x)$；同理，$L^tL^s(x)=L^{t+s}(x)$.

从而得到下面两个重要的式子

(2·4) $\qquad T^tT^s=T^{t+s}$,

(2·5) $\qquad L^tL^s=L^{t+s}$,

这正是我们引进斜积π的目的所在。

§3　本文结果的叙述

定理　考虑概周期微分方程

(3·1)　$x' = A(t)x + F(x,t) = f(x,t)$，　$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}$(*)

x是k维欧氏空间向量。方程(3·1)满足条件：

(i) $F(x,t)$为一致概周期连续向量函数，且对x，

$F(x,t) \in C^{(1)}$；$\|F(x,t)\| = o(\|x\|)$，$x \to 0$。

(ii) $A(t)$是连续概周期方阵，而$\dfrac{dx}{dt} = A_1(t)x$的非显易解上特征指数小于零；$\dfrac{dy}{dt} = A_2(t)y$的非显易解下特征指数大于零。

那么，存在一个从系统(3·1)的$x=0$邻域到系统

(3·2)　$u' = A(t)u = g(u,t)$

的$u=0$邻域的拓扑映射

(3·3)　P:　$u = u(x)$,

使得

(3·4)　$L^t P = P T^t$

这里T^t与L^t是§2中指出过的映射。$T^t(x) = x^t = \varphi(x,f,t)$，$\varphi(x,f,0) = x$；$L^t(u) = u^t = \psi(u,g,t)$，$\psi(u,g,0) = u$. $\varphi(x,f,t)$、$\psi(u,g,t)$分别为(3·1)、(3.2)的解。

§4　定理的证明

本文这个定理的证明共分为六个部分。

(一)　一般结论

由[2]，方程(3·2)具有指数型二分法。即$x' = A_1(t)x$有基本方阵$X_1(t)$，$X_1(0) = I_1 = I_{k_1 \times k_1}$；$y' = A_2(t)y$有基本方阵$X_2(t)$，$X_2(0) = I_2 = I_{k_2 \times k_2}$，$k_1 + k_2 = k$，使得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的基本方阵$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & 0 \\ 0 & X_2(t) \end{pmatrix}$，$X(0) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = I$. 设$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} X_1^{-1}(t) & 0 \\ 0 & X_2^{-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(t) & 0 \\ 0 & Z_2(t) \end{pmatrix} = Z(t)$。那么由二分法的结果，对此$X(t)$存在$\alpha, \beta > 0$，使得

(*)当$A(t)$不取特殊的分块对角形式$\begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}$，而取一般形式时，定理的结论亦成立。因为按照coppel的说法只要$x' = A(t)x$具有指数型二分法，就可通过正则有界连续线性变换(逆变换亦有界)化为$\tilde{x}' = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}\tilde{x}$的形式。只不过可能不是概周期的，但这对论证过程不起影响。

$$(4\cdot1\cdot1)\qquad \|X_1(t)Z_1(s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(t-s)},\qquad t\geqslant s;$$

$$(4\cdot1\cdot2)\qquad \|X_2(t)Z_2(s)\|\leqslant\beta e^{\alpha(t-s)},\qquad t\leqslant s.$$

取$t=1>0=s$，由$(4\cdot1\cdot1)$，$\|X_1(1)Z_1(0)\|\leqslant\beta e^{-\alpha}$．可设$\beta e^{-\alpha}<1$.不然作变换$\tau=\sigma t$，$\sigma$为很小的正数。同样，由$(4\cdot1\cdot2)$，取$t=0<1=s$，得$\|Z_2(1)\|=\|X_2(0)Z_2(1)\|\leqslant\beta e^{-\alpha}<1$．于是有

$$(4\cdot1\cdot3)\ \|X_1(1)\|=a<1,\qquad \|Z_2(1)\|=\frac{1}{b}<1.$$

另外，容易推得

$$(4\cdot1\cdot4)\qquad \|Z_1(1)\|\geqslant\frac{k_1}{a}>1,\qquad \|X_2(1)\|\geqslant bk_2>1.$$

对应于解阵 $X(t)=\begin{pmatrix} X_1(t) & 0\\ 0 & X_2(t)\end{pmatrix}$，把$x$改写为$(x, y)$，$F(x,t)$改写为$(F_1(x,y,t),$ $F_2(x,y,t))$，使得系统(3·1)的解相应地表达为

$$(4\cdot1\cdot5)\qquad T^t:\ x^t=X_1(t)x+\int_0^t X_1(t)Z_1(\tau)F_1(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau,$$

$$y^t=X_2(t)y+\int_0^t X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,\ y^\tau,\tau)d\tau.$$

利用(2·3)，把(3·1)以$x^s=\varphi(x,f,s)$为始点的解表达为

$(4\cdot1\cdot5)^*\qquad T^{s+t}$:

$$x^{s+t}=X_1(s+t)Z_2(s)x^s+\int_0^t X_1(s+t)Z_1(s+\tau)F_1(x^{s+\tau},y^{s+\tau},s+\tau)d\tau,$$

$$y^{s+t}=X_2(s+t)Z_2(s)y^s+\int_0^t X_2(s+t)Z_2(s+\tau)F_2(x^{s+\tau},y^{s+\tau},s+\tau)\,d\tau.$$

我们记

$$W_1=W_1(t,x,y)=\int_0^t X_1(t)Z_1(\tau)F_1(x^\tau,\ y^\tau,\tau)\,d\tau,$$

$$W_2=W_2(t,x,y)=\int_0^t X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,\ y^\tau,\tau)d\tau,$$

下面讨论F_1,F_2,W_1,W_2的性质。我们只给出结论$(4\cdot1\cdot6)$至$(4\cdot1\cdot9)$，详细验证可参考〔5〕第232页至233页。由于定理的要求是局部，可设$F(x,y,t)$在$(x,y)=(0,0)$邻域之外恒等于零。因此能够假设对$\theta>0$，存在$s=s(\theta)>0$，当$\theta\to0$时$s(\theta)\to0$，使得

$(4\cdot1\cdot6)\qquad \|F_{1x}\|,\|F_{1y}\|,\|F_{2x}\|,\|F_{2y}\|\leqslant\theta$，对一切$x$、$y$及$t$成立。

$(4\cdot1\cdot7)\qquad \|F_1\|,\|F_2\|=0$，当$\|x\|+\|y\|\geqslant s(\theta)$．

存在$r=r(\theta)>0$，当$\theta\to0$时$r(\theta)\to0$，使得

$(4\cdot1\cdot8)\qquad W_1=0,\quad W_2=0$，当$\|x\|^2+\|y\|^2\geqslant r^2$，$0\leqslant t\leqslant1$.

又存在$\varepsilon=\varepsilon(\theta)$，当$\theta\to0$时，$\varepsilon(\theta)\to0$，使得

$(4\cdot1\cdot9)\qquad \|W_{1x}\|$，$\|W_{1y}\|$，$\|W_{2x}\|$，$\|W_{2y}\|\leqslant\varepsilon$，对所有$x,y$及$0\leqslant t\leqslant1$成立。

另外，从$(4\cdot1\cdot5)$及$\|F(x,y,t)\|=o(\|x\|+\|y\|)$知

$(4\cdot1\cdot10)\qquad \|W_1(t,x,y)\|,\|W_2(t,x,y)\|=o(\|x\|+\|y\|)$，对固定的$t$及$x,y\to0$成立。

（二）映射P_1的存在性

〔引理 1〕 在定理的条件下，存在一个由系统(3·1)之$(x,y)=(0,0)$邻域到系统(3·2)之$(u,v)=(0,0)$邻域的连续映射P_1：$(x,y)\to(u,v)$，这里

(4·2·1) P_1：$u=U_1(x,y)$, $\quad v=V_1(x,y)$

使得

(4·2·2) $L^1P_1=P_1T^1$.

其中 T^1：$x^1=X_1(1)x+W_1(1,x,y)$, $\quad y^1=X_2(1)y+W_2(1,x,y)$;

L^1：$u^1=X_1(1)u$, $\quad v^1=X_2(1)v$.

同时P_1还具有性质

(4·2·3) $P_1(0,0)=(0,0)$,

(4·2·4) $U_1(x,y)=x$，当$\|x\|\geqslant\dfrac{r}{a}$；$V_1(x,y)=y$，当$\|y\|\geqslant r$。

证明 从$L^1P_1(x,y)=P_1T^1(x,y)$，容易得到

(4·2·5) $X_2(1)V_1(x,y)=V_1(X_1(1)x+W_1(1,x,y),X_2(1)y+W_2(1,x,y))$,

(4·2·6) $X_1(1)U_1(x,y)=U_1(X_1(1)x+W_1(1,x,y),X_2(1)y+W_2(1,x,y))$.

为求$V_1(x,y)$，可用逐步逼近法。令

$(4·2·7)_0$ $V^0(x,y)=y$,

$(4·2·7)_n$ $V^n(x,y)=Z_2(1)V^{n-1}(X_1(1)x+W_1(1,x,y),\ X_2(1)y+W_2(1,x,y))$。

如果(4·1·8)、(4·1·9)中的r,ε充分小，可归纳证明有$k>0,0<l,d<1$，使得$\|V^n-V^{n-1}\|\leqslant kd^n(\|x\|+\|y\|)^l$.

事实上，由 $(4·2·7)_0$，$(4·2·7)_n$，(4·1·10)知

$\|V^1(x,y)-V^0(x,y)\|=\|Z_2(1)(X_2(1)y+W_2(1,x,y))-y\|\leqslant\|Z_2(1)\|\cdot k\cdot(\|x\|+\|y\|)^l$
$=\dfrac{k}{b}(\|x\|+\|y\|)^l\leqslant kd(\|x\|+\|y\|)^l\qquad(k>0,0<l<1$，且$l$可很小$)(\dfrac{1}{b}\leqslant d<1)$.

现归纳假设$\|V^n(x,y)-V^{n-1}(x,y)\|\leqslant kd^n(\|x\|+\|y\|)^l$，则$\|V^{n+1}(x,y)-V^n(x,y)\|$
$=\|Z_2(1)[V^n(X_1(1)x+W_1(1,x,y),X_2(1)y+W_2(1,x,y))-V^{n-1}(X_1(1)x+W_1(1,x,y),X_2(1)y+W_2(1,x,y))]\|\leqslant\|Z_2(1)\|\cdot k\cdot d^n(\|X_1(1)x+W_1\|+\|X_2(1)y+W_2\|)^l$.

由(4·1·9)，$\|W_1\|,\|W_2\|\leqslant\varepsilon(\|x\|+\|y\|)$，$0\leqslant t\leqslant1$,

故

$$(\|X_1(1)x+W_1\|+\|X_2(1)y+W_2\|)^l\leqslant(a\|x\|+2\varepsilon(\|x\|+\|y\|)+\|X_2(1)\|\cdot\|y\|)^l$$
$$\leqslant(\|X_2(1)\|+2\varepsilon)^l(\|x\|+\|y\|)^l.$$

由(4·1·4)，$\|X_2(1)\|+2\varepsilon>b>1$，但$l$可以很小，故可设$(\|X_2(1)\|+2\varepsilon)^l/b<1$. 于是若取定$d=(\|X_2(1)\|+2\varepsilon)^l/b$，则有$\dfrac{1}{b}<d<1$. 从而

$$\|V^{n+1}(x,y)-V^n(x,y)\|\leqslant kd^{n+1}(\|x\|+\|y\|)^l,$$

归纳假设成立。因此$V_1(x,y)=\lim V^n(x,y)$存在，且在任何(x,y)的有界集上一致收敛。又因每一个V^n连续，则$V_1(x,y)$连续。

为求$U_1(x,y)$，同样可用逐步逼近法。但因$\|Z_1(1)\|>1$（见(4·1·4)式），故不能套用(4·2·7)$_n$那样的格式。但对(4·2·6)可令

$$(4\cdot2\cdot8)\qquad \tilde{x}=X_1(1)x+W_1(1,x,y),\quad \tilde{y}=X_2(1)y+W_2(1,x,y),$$

可从上式解得

$$(4\cdot2\cdot9)\qquad x=Z_1(1)\tilde{x}+\widetilde{W}_1(\tilde{x},\ \tilde{y}),\qquad y=Z_2(1)\tilde{y}+\widetilde{W}_2(\tilde{x},\ \tilde{y}),$$

且$\widetilde{W}_1,\widetilde{W}_2$与$W_1,W_2$具有完全相似的性质（详细叙述可参考〔5〕第246—247页）。这时(4·2·6)变成

$$(4\cdot2\cdot10)\qquad X_1(1)U_1(Z_1(1)\tilde{x}+\widetilde{W}_1(\tilde{x},\ \tilde{y}),Z_2(1)\tilde{y}+\widetilde{W}_2(\tilde{x},\ \tilde{y}))=U_1(\tilde{x},\ \tilde{y}).$$

这里$\|X_1(1)\|<1$，跟求$V_1(x,y)$一样，可求得$U_1(\tilde{x},\ \tilde{y})$，于是得到$U_1(x,y)$，它也是连续的。至此，$P_1$存在且连续。下面验证(4·2·3)。

从(4·2·7)$_0$，(4·2·7)$_n$，当$x,y=0$时，$V^0=0$，则得$V^1=0$，设$V^n=0$，则$V^{n+1}=0$。可见$V_1(0,0)=0$。同理$U_1(0,0)=0$，从而$P_1(0,0)=(0,0)$。

再验证(4·2·4)，因为当$\|y\|\geqslant r$时，从(4·1·8)，对$t=1$有$W_1,W_2=0$，由$V^0(x,y)=y$，则$\|V^1-V^0\|=\|Z_2(1)W_2(1,\ x,\ y)\|=0$，故$V^1=V^0=y$，设$V^n=y$，则从$\|V^{n+1}-V^n\|\leqslant\|Z_2(1)\|\cdot\|V^n-V^{n-1}\|=0$，得$V^{n+1}=y$，于是当$\|y\|\geqslant r$时，$V_1(x,y)=y$，同样可证当$\|x\|\geqslant\frac{r}{a}$时有$U_1(x,y)=x$。引理1证毕。

（三）映射P的存在性

〔引理2〕 在定理的条件下，存在一个从系统(3·1)的$(x,y)=(0,0)$邻域到系统(3·2)的$(u,v)=(0,0)$邻域的连续映射P：$(x,y)\to(u,v)$，使得

$$(4\cdot3\cdot1)\qquad L^tP=PT^t,\text{这里}P(x,y)=(U(x,y),V(x,y)).\text{同时有}$$

$$(4\cdot3\cdot2)\qquad P(0,0)=(0,0),$$

且存在$c>0$，使得

$$(4\cdot3\cdot3)\qquad U(x,y)=x,\text{当}\|x\|\geqslant c;\ V(x,y)=y,\text{当}\|y\|\geqslant c.$$

证明：

取映射

$$(4\cdot3\cdot4)\qquad P=\int_0^1L^{-s}P_1T^s ds.$$

首先验证对R上每一个t，P能满足(4·3·1)。从(2·4)，(2·5)，可得$L^tP=\int_0^1L^{t-s}P_1T^s ds=\left(\int_0^1L^{t-s}P_1T^{s-t}ds\right)T^t$.

令$s-t=\tau$，则$\int_0^1L^{t-s}P_1T^{s-t}ds=\int_{-t}^{1-t}L^{-\tau}P_1T^\tau d\tau=\left(\int_{-t}^0+\int_0^{1-t}\right)L^{-\tau}P_1T^\tau d\tau$.

由(4·2·2)，且在(四)中将证得P_1为拓扑映射，故有$L^1=P_1T^1P_1^{-1}$，那么$L^{-\tau}P_1T^\tau=L^{-\tau-1}L^1P_1T^\tau=L^{-1-\tau}P_1T^{1+\tau}$.令$1+\tau=\xi$，则

$$\int_{-t}^0L^{-\tau}P_1T^\tau d\tau=\int_{-t}^0L^{-1-\tau}P_1T^{1+\tau}d\tau=\int_{1-t}^1L^{-\xi}P_1T^\xi d\xi,$$

从而 $\int_0^1 L^{t-s}P_1T^{s-t}ds=\left(\int_{-t}^{0}+\int_0^{1-t}\right)L^{-s}P_1T^{s}ds=\left(\int_{1-t}^{1}+\int_0^{1-t}\right)L^{-s}P_1T^{s}ds=$

$\int_0^1 L^{-s}P_1T^{s}ds=P,$

得到 $L^tP=PT^t$. 由T^t、L^t、P_1之连续性知P连续。下面验证(4·3·2).

根据(4·3·4)，可以写出$P(x,y)$的具体表达式

$$(4\cdot3\cdot5)\qquad P(x,y)=\int_0^1\begin{pmatrix}Z_1(t)U_1(X_1(t)x+W_1(t,x,y),X_2(t)y+W_2(t,x,y))\\ Z_2(t)V_1(X_1(t)x+W_1(t,x,y),X_2(t)y+W_2(t,x,y))\end{pmatrix}^*dt$$

$$=\begin{pmatrix}U(x,y)\\ V(x,y)\end{pmatrix}^*,\qquad *\text{号表示转置。}$$

由(4·2·3)以及$W_1,W_2|_{(0,0)}=0$，立知$P(0,0)=(0,0)$.再验证(4·3·3). 由(4·2·4)，若

$\|X_1(t)x+W_1(t,x,y)\|\geqslant\frac{r}{a}$，则

$U_1(X_1(t)x+W_1(t,x,y),X_2(t)y+W_2(t,x,y))=X_1(t)x+W_1(t,x,y)$.

设$\|x\|\geqslant\frac{r}{a}>r$,推得$W_1(t,x,y)=0,t\in[0,1]$（依(4·1·8)）.

从而 $$\|X_1(t)x+W_1(t,x,y)\|=\|X_1(t)x\|.$$

为使$\|x\|\geqslant\frac{r}{a}>r$且使$\|X_1(t)x\|\geqslant\frac{r}{a}$，可令

$$c_1=max\left\{\frac{r}{a},\ \frac{r}{a}\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant1}\|Z_1(t)\|\right\}。$$

这样当$\|x\|\geqslant c_1$时有

$$\|X_1(t)x+W_1(t,x,y)\|=\|X_1(t)x\|\geqslant\frac{\|x\|}{\|Z_1(t)\|}\geqslant\frac{\|x\|}{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant1}\|Z_1(t)\|}\geqslant\frac{r}{a},$$

推出 $U_1(X_1(t)x+W_1(t,x,y),X_2(t)y+W_2(t,x,y))=X_1(t)x+W_1=X_1(t)x$

那么这时$U(x,y)=\int_0^1Z_1(t)X_1(t)xdt\equiv x$,当$\|x\|\geqslant c_1$.

同理存在$c_2>0$,使得$V(x,y)=y$,当$\|y\|\geqslant c_2$. 再取$c=max(c_1,c_2)$，则可使(4·3·3)成立，引理2证毕。

（四）P_1 为拓扑映射

把(4·1·5)略加改写，可得

$$(4\cdot4\cdot1)T^t:\quad x^t=X_1(t)x+\int_0^tX_1(t)Z_1(\tau)F_1(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau,$$

$$y^t=X_2(t)y_0-\int_t^\infty X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau.$$

其中 $y^t=X_2(t)y+\int_0^tX_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau$

$$=X_2(t)\left(y+\int_0^\infty Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau\right)-\int_t^\infty X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau y^\tau,\tau)d\tau$$

$\xlongequal{\text{记}} X_2(t)y_0-\int_t^\infty X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau.$

设$M_+=\{(x,y):\ T^t(x,y)\to(0,0),\ t\to\infty\}$

$M_-=\{(x,y):\ T^t(x,y)\to(0,0),\ t\to-\infty\}$

〔**引理 3**〕 在(4·4·1)中，$y=-\int_0^\infty Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau$，即 $y_0=0$的充要条件为$(x,y)\in M_+$.

证明 必要性。当$y_0=0$，则有

$$(4\cdot4\cdot2)\qquad x^t=X_1(t)x+\int_0^t X_1(t)Z_1(\tau)F_1(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau$$

$$y^t=-\int_t^\infty X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau.$$

这时，$\|x^t\|\leqslant\beta e^{-\alpha t}\|x\|+\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|F_1(x^\tau,y^\tau,\tau)\|d\tau$,

$$\|y^t\|\leqslant\beta\int_t^\infty e^{\alpha(t-\tau)}\|F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)\|d\tau.$$

注意到(4·1·7)，对[0, ∞)中任一τ，如果$\|x^\tau\|+\|y^\tau\|\geqslant s(\theta)$，则$\|F_1(x^\tau,y^\tau,\tau)\|,\|F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)\|=0$，故不妨设$\|x^\tau\|+\|y^\tau\|\leqslant s(\theta)$，则$\|F_1\|,\|F_2\|=o(\|x^\tau\|+\|y^\tau\|)\leqslant o(s(\theta))$.又因为$\int_0^t\beta e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau,\int_t^\infty\beta e^{\alpha(t-\tau)}d\tau$对$t\in[0,\infty)$是一致有界的，因此

$$\|x^t\|\leqslant\beta e^{-\alpha t}+m_1\cdot o(s(\theta)),$$

$$\|y^t\|\leqslant m_2\cdot o(s(\theta)).$$

断言$\|x^t\|\to0(t\to\infty)$.否则存在$l>0$及$\{t_n\}$, $t_n\to\infty$，使得$\lim\|x^{t_n}\|=l>0$.

另一方面，$o(s(\theta))$可以任意小，可设$m_1\cdot o(s(\theta))\leqslant\frac{1}{2}l$，于是$\lim\|x^{t_n}\|\leqslant\lim(\beta e^{-\alpha t_n}+m_1\cdot o(s(\theta)))\leqslant\frac{1}{2}l$.

这就矛盾了。故$\|x^t\|\to0(t\to\infty)$.同样可得当$t\to\infty$时$\|y^t\|\to0$.则$(x,y)\in M_+$.

充分性。若$y_0\neq0$.如上述一样，由(4·4·1)首先得$\|x^t\|\to0(t\to\infty)$.但是这时却有$\|y^t\|\to\infty(t\to\infty)$。对此可验证如下。

$$y^t=X_2(t)\left(y_0-\int_t^\infty Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau\right)\xlongequal{\text{记}}X_2(t)z.$$

如上述，$\int_t^\infty\|Z_2(\tau)\|\cdot\|F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)\|d\tau\leqslant m_2\cdot o(s(\theta))$，那么

$$\|z\|\geqslant\|y_0\|-m_2\cdot o(s(\theta)),$$

因$y_0\neq0$，故可取θ甚小，使$m_2\cdot o(s(\theta))\leqslant\frac{1}{2}\|y_0\|$，这时$\|z\|\geqslant\frac{1}{2}\|y_0\|$.因为$\|y^t\|=\|X_2(t)z\|\geqslant\frac{\|z\|}{\|Z_2(t)\|}\geqslant\frac{\|z\|}{\beta e^{-\alpha t}}\geqslant\frac{1}{2\beta}e^{\alpha t}\|y_0\|$，从而$\|y^t\|\to\infty(t\to\infty)$.

可见当$y_0\neq0$时推出$(x,y)\notin M_+$，即从$(x,y)\in M_+$可推得$y_0=0$.

〔**引理4**〕　设$M\pm$的意义如前述，则

(4·4·3)　$M_+\cap M_-=(0,0)$；

(4·4·4)　当$(x,y)\bar{\in}M_+$，则$\|x^n\|\to 0,\|y^n\|\to\infty,n\to\infty$；

(4·4·5)　当$(x,y)\bar{\in}M_-$，则$\|x^n\|\to\infty,\|y^n\|\to 0,n\to-\infty$.

证明

对系统(3·1)而言，除了零解没有其他有界解。若$(x,y)\in M_+\cap M_-$,则表示过(x,y)的解有界，从而$(x,y)=(0,0)$.这就证明了(4·4·3).

从引理3知,当$(x,y)\bar{\in}M_+$推得$y_0\neq 0$，从而$\|x^t\|\to 0$,且$\|y^t\|\to\infty\ (t\to\infty)$.特别取$t=n$,立得(4·4·4)，合理可以证明(4·4·5).

〔**引理 5**〕　当$(x,y)\in M_+$，则$y=\eta(x)$,$\eta(x)$对一切x有定义。

证明

任给一个x，都有唯一的x^t，y^t使得(4·4·2)成立。对此可用逐步逼近法，详细步骤从略。那么得$y^t=X_2(t)y+\int_0^t X_2(t)Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau$,此处$y$是唯一的。这时

$$y=-\int_0^\infty Z_2(\tau)F_2(x^\tau,y^\tau,\tau)d\tau=\eta(x).$$

这表明当$(x,y)\in M_+$时，y可唯一地表示为$y=\eta(x)$，对所有x有定义。

〔**引理 6**〕　引理1中的P_1是一对一的映射。

证明:

假设存在一对点$(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$，使得$P_1(x_1,y_1)=P_1(x_2,y_2)$.利用$L^1P_1=P_1T^1$以及$T^1(x_j,y_j)=(x_j^1,\ y_j^1)$，$j=1,2$. 先有$L^1P_1(x_2,y_2)=P_1T^1(x_2,y_2)$. 从此式左边看有$L^1P_1(x_2,y_2)=L^1P_1(x_1,y_1)=P_1T^1(x_1,y_1)=P_1(x_1^1,y_1^1)$,从右边得$P_1T^1(x_2,y_2)=P_1(x_2^1,\ y_2^1)$，故 $P_1(x_1^1\ y_1^1)=P_1(x_2^1,\ y_2^1)$.

现归纳假设

(4·4·6)　$P_1(x_1^n,\ y_1^n)=P_1(x_2^n,\ y_2^n)$，$n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots\cdots$

$$(x_j^n,y_j^n)=T^n(x_j,y_j),j=1,2.$$

重复上面的证法，又可得$P_1(x_1^{n+1},\ y_1^{n+1})=P_1(x_2^{n+1}\ y_2^{n+1})$,所以归纳假设成立。因为对每一个$t$，$T^t$是一对一的，因此对每一个$n$，有

(4·4·7)　$(x_1^n,y_1^n)\neq(x_2^n,y_2^n)$.$n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

我们考虑以下各种情况。

(Ⅰ)　设$(x_1,y_1)\in M_+$，　$(x_2,y_2)\in M_-$(即$\bar{\in}M_+$).

由$(x_1,y_1)\in M_+$，则$(x_1^n,y_1^n)\to(0,0)$　$(n\to\infty)$

由$(x_2,y_2)\bar{\in}M_+$，则$\|y_2^n\|\to\infty$　$(n\to\infty)$

由(4·2·3)，　$P_1(x_1^n, y_1^n)\to(0,0)$　$(n\to\infty)$

由(4·2·4)，　$\|P_1(x_2^n, y_2^n)\|\to\infty$　$(n\to\infty)$

这与(4·4·6)矛盾。则情况(Ⅰ)不能发生。

(Ⅱ)　设$(x_j, y_j)\in M_+$，　$j=1,2$.

由引理5，$y_j=\eta(x_j)$，$j=1,2$. 由(4·4·3)，$(x_j, y_j)\bar{\in} M_-$.

由(4·4·5)，$\|x_j^n\|\to\infty\ (n\to-\infty)$，$j=1,2$.

由(4·2·4)，(4·4·6)，当$-n$充分大时有$x_1^n=x_2^n$. 因为$y=\eta(x)$对所有x有定义，且因$(x_j, y_j)\in M_+$，故$(x_j^n, y_j^n)\in M_+$，那么$y_1^n=\eta(x_1^n)=\eta(x_2^n)=y_2^n$，于是当$-n$充分大时，$(x_1^n, y_1^n)=(x_2^n, y_2^n)$. 这与(4·4·7)矛盾。则情况(Ⅱ)不能发生。

(Ⅲ)　设$(x_j, y_j)\in M_-$，$j=1,2$.

讨论与(Ⅱ)相同。故(Ⅲ)不能发生。

(Ⅳ)　设$(x_j, y_j)\bar{\in} M_+$且$(x_j, y_j)\bar{\in} M_-$，$j=1,2$.

由(4·4·4)，$\|x_j^n\|\to0$，$\|y_j^n\|\to\infty$，$n\to\infty$，$j=1,2$.

由(4·4·5)，$\|x_j^n\|\to\infty$，$\|y_j^n\|\to0$，$n\to-\infty$，$j=1,2$.

故当$-n$充分大时，$\|x_j^n\|\geqslant\frac{r}{a}(j=1,2)$. 由(4·2·4)及(4·4·6)知$x_1^n=x_2^n$，因此可以假设，$\|x_j\|=\|x_j^0\|\geqslant\frac{r}{a}$，$j=1,2$. 否则以$(x_j^n, y_j^n)$代替$(x_j^0, y_j^0)=(x_j, y_j)$，$j=1,2$. 换言之，可设$x_1=x_2$，即$x_1^0=x_2^0$. 但因$(x_1, y_1)\neq(x_2, y_2)$故$y_1\neq y_2$，即$y_1^0=y_1\neq y_2=y_2^0$.

现在观察n充分大时x_j^n, y_j^n的性态。因为当$n\to\infty$时，$\|y_j^n\|\to\infty$，故只要n充分大，可设$\|y_j^n\|\geqslant r$，这时由(4·2·4)、(4·4·6)知$y_1^n=y_2^n$。由(4·1·5)*，取$s=n$, $t=1$，再由(4·1·8)，可得

$$x_j^{n+1}=X_1(n+1)Z_1(n)x_j^n$$

$$y_j^{n+1}=X_2(n+1)Z_2(n)y_j^n,\qquad j=1,2\qquad n\text{充分大。}$$

由前面假设$x_1^0=x_2^0$，$y_1^0\neq y_2^0$，知$\|y_2^0-y_1^0\|\geqslant\|x_2^0-x_1^0\|=0$

归纳假设$\|x_2^n-x_1^n\|\leqslant\|y_2^n-y_1^n\|$. 由于

$$\|x_2^{n+1}-x_1^{n+1}\|\leqslant\|X_1(n+1)Z_1(n)\|\cdot\|x_2^n-x_1^n\|\leqslant\beta e^{-a}\|x_2^n-x_1^n\|\leqslant\|x_2^n-x_1^n\|,$$

同时

$$\|y_2^{n+1}-y_1^{n+1}\|=\|X_2(n+1)Z_2(n)(y_2^n-y_1^n)\|\geqslant\|y_2^n-y_1^n\|/\|X_2(n)Z_2(n+1)\|\geqslant\|y_2^n-y_1^n\|/$$

$\beta e^{-a} \geqslant \|y_2^n - y_1^n\|$,

从而

$$\|y_2^{n+1} - y_1^{n+1}\| \geqslant \|y_2^n - y_1^n\| \geqslant \|x_2^n - x_1^n\| \geqslant \|x_2^{n+1} - x_1^{n+1}\|,$$

那么归纳假设成立。但当n充分大时，$y_1^n = y_2^n$，则$\|x_2^n - x_1^n\| \leqslant \|y_2^n - y_1^n\| = 0$，得知$x_2^n = x_1^n$，于是有$(x_1^n, y_1^n) = (x_2^n, y_2^n)$，$n$充分大。此与(4·4·7)矛盾。所以情况(Ⅳ)亦不能发生。但(x_i, y_i)对$M\pm$的从属情况只有这四种，既然都不可能发生，则原假设不真。P_1是一对一映射。证毕。

〔引理 7〕 引理1中的P_1是拓扑映射。

证明

前面已证得P_1为一对一的连续映射。下面验证P_1为闭映射。

设闭集$D \subset (x, y)$空间。欲证$P_1(D)$为闭集。任取$P_1(D)$中序列$\{(u_n, v_n)\}$，$(u_n, v_n) = P_1(x_n, y_n)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n, v_n) = (u_0, v_0)$. 首先$\{(x_n, y_n)\}$必定有界。否则，从(4·2·4)知$P_1(x_n, y_n)$的$u$或$v$坐标必有一个无界，或都无界。这与$(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$的条件矛盾。那么$\{(x_n, y_n)\}$必有聚点$(x_0, y_0) \in D$(闭集). 即存在$n_j \to \infty$，使$\lim\limits_{n_j\to\infty}(x_{n_j}, y_{n_j}) = (x_0, y_0) \in D$.

因P_1连续，故

$\lim\limits_{n_j\to\infty}(u_{n_j}, v_{n_j}) = \lim\limits_{n_j\to\infty} P_1(x_{n_j}, y_{n_j}) = P_1(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$. 但$(x_0, y_0) \in D$，则$(u_0, v_0) = P_1(x_0, y_0) \in P_1(D)$，即$P_1(D)$是闭集。$P_1$就为闭映射。

P_1还是满映射。否则至少有一点$(u_0, v_0) \in (u, v)$空间，但它不是(x, y)空间中任何一点的映象。可取$\{(u_n, v_n)\} \subset (u, v)$空间，$(u_n, v_n) = P_1(x_n, y_n) \to (u_0, v_0)$. 重复上一段的证明，知有$(x_0, y_0) \in (x, y)$空间，且使$(u_{n_j}, v_{n_j}) = P_1(x_{n_j}, y_{n_j}) \to (u_0, v_0) = P_1(x_0, y_0)$. 这就和$(u_0, v_0)$不是$(x, y)$空间中任何一点的象的假设矛盾。故$P_1$为满映射。

由于P_1是一对一连续满映射，从而P_1^{-1}存在(参见〔6〕之证明)，又因P_1为闭映射，则P_1^{-1}连续。于是P_1为拓扑映射。

(五) P为拓扑映射

〔引理 8〕 引理2中的映射P是一对一的。

证明

假设存在两点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)，$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$但$P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2)$. 在(4·3·1)中取$t = 1$，得到$L^1 P = PT^1$. 再利用关系式$T^t T^s = T^{t+s}$，完全同于证明(4·4·6)、(4·4·7)一样，可证明

(4·5·1) $\quad P(x_1^n, y_1^n) = P(x_2^n, y_2^n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

(4·5·2)　　$(x_1^n, y_1^n) \neq (x_2^n, y_2^n), n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

现在只要利用(4·5·1)、(4·5·2)以及引理4、引理2，完全类似于引理6的证明，可得P为一对一的映射。证毕。

〔引理9〕　引理2中的P是拓扑映射。

证明

完全类似于引理7证明P_1为拓扑映射那样，只要把P_1改为P，(4·2·4)改为(4·3·3)即可。

（六）证明定理

由引理2及引理9，P为拓扑映射且使得$L'P=PT'$.从而完成了对概周期拟线性非定常系统微分方程的局部线性化工作。

参考文献

[1] P.Hartman,Proc、Amer、Math、Soc.14,568(1963).

[2] 林振声，数学年刊，V3，130—146(1982).

[3] G.R.Sell, Trans、Amer、Math、Soc.,127,241(1967).

[4] 林振声著，概周期微分方程和积分流分，(即将出版)。

[5] P.Hartman, Ordinary Differential Eguations,V.S.A.,(1964).

[6] 江泽涵著，拓扑学引论，上海科技出版社(1978).

LOCAL LINEARIZATION FOR ALMOST PERIODIC DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Zhang Jianfeng

Abstract

In this paper, the results of P. Hartman's local linearization for autonomous quasi-linear systems are generalize to the nonautonomous almost periodic quasi-linear systems.In the proof of the results we use the skew-product theory for nonautonomous systems established by G. R. Sell and the theory on almost periodic linear systems with exponential dichotomies when their generalized characteristic exponents are not equal to zero established by Lin Zhensheng.