

# 計及渦流时直流截錐头螺管电磁鉄 动态吸力的計算

陈一萍 张冠生  
(电机系)

## 摘 要

对非迭层结构的直流截锥头螺管电磁鉄, 在进行动特性计算时不仅要考虑铁心磁阻, 分布漏磁通等问题, 而且在计算中涡流是不可忽略的因素。由于涡流将使线圈工作电流增大, 动态吸力减小和动作时间增长。本文提出了计及涡流时的直流电磁系统的等效电路, 把线圈电流分成激磁分量和涡流分量, 并根据麦克斯韦尔方程组推导出涡流分量的近似表达式, 提出电磁机构计及涡流时动特性主要是动态吸力的计算方法。本文应用这个方法进行计算, 获得了和实验值相当接近的计算结果。

## 一、前 言

在电磁机构的动态过程中, 涡流将使线圈电流增大, 动态吸力减小, 动作时间增长。对于非迭层结构的电磁机构, 涡流的影响将更显著。现有文献(1. 2. 3. 4. 5)都对电磁机构的动态吸力进行了详细的计算。经典的方法首推ЛИБКОВ图解分析法。这种方法既考虑了磁路漏磁, 又考虑了铁心与非工作气隙的磁阻, 但是它没有考虑到涡流的作用。在叠片式电磁机构中运用这种方法计算, 精度尚可。但在整块铁心的电磁机构中将导致较大的计算误差。近年来日本学者别所一夫等用有限元素法对直流螺管式电磁鉄的动态过程进行了详细的分析研究, 并得出一些有益的结论。但遗憾的是他们只提供了动作时间的计算结果, 未能同时提供其电流计算与实测值, 特别是动态吸力计算与实测值的比较。

本文旨在尝试用磁路的方法, 提出一种计及涡流时的直流电磁系统的动态吸力, 动态电流及动作时间的计算方法, 并以MQZ1—10直流截锥头螺管电磁鉄为例进行计算, 提供计算结果与实测值进行比较。动态吸力测试装置部分将另文发表。

## 二、计及涡流时的等效电路和动态微分方程组

一般, 我们总是把直流电磁系统用图1这样的等效电路来表示:

本文1982年12月24日收到。

• 本文是研究生陈一萍毕业论文的部分内容

此时对应的动态微分方程组为:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = i \cdot R + \frac{d\psi}{dt} \quad (1) \\ \psi = f_2(i, s) \quad (2) \\ F = f_3(W\mu) \quad (3) \\ m \frac{d^2s}{dt^2} = F - F_f(s) - F_f\left(\frac{ds}{dt}\right) \quad (4) \\ \theta = f_5(P, t, D_k, h_k) \quad (5) \end{array} \right.$$

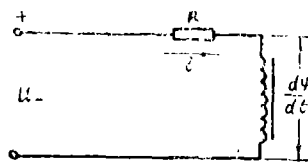


图1

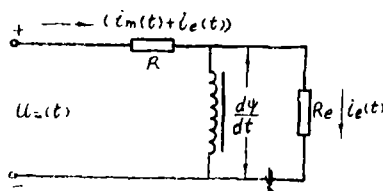


图2

式中:  $U$ ——电源电压;  $i$ ——线圈电流;  
 $R$ ——线圈电阻;  
 $\psi$ ——电磁系统全磁链;  
 $F$ ——电磁吸力;  $F_f$ ——负载反力;  
 $W\mu$ ——电磁系统磁能;  
 $m$ ——运动部件质量;  
 $s$ ——衔铁位移;  $\theta$ ——线圈温升;  
 $P$ ——线圈上消耗的功率;  
 $D_k, h_k$ ——线圈参数。

通常, 动态过程时间较短, 温度变化不大, 由温度变化引起的线圈电阻的变化在动态过程中可以不计。于是计算电磁系统的动态过程就是解非线性微分方程组(1)、(2)、(3)、(4), 这是以往大多数文献中, 不论是采用幂级数法或图解法, 还是微分方程数值解法, 不论是采用手算或模拟机计算或电子数字式计算机计算所共同的。但是, 由于在等效电路与动态微分方程组中都未曾计及涡流, 所以不论用什么方法求解, 该微分方程组都无法计及涡流的影响。

如何在计算动态过程中计及涡流的影响呢? 我们仍然从等效电路出发。大家知道, 涡流是由变化的磁场产生的, 它将使损耗增加, 同时还产生去磁作用。因此, 计及涡流影响后的电磁系统应当用图2的等效电路表示。

图中:  $i_m(t)$ ——激磁电流;

$i_e(t)$ ——涡流;  $R_e$ ——等效涡流电阻;

当  $R_e = \infty$  时, 即不计涡流时,  $i_e(t) = 0$ , 流过线圈  $R$  的电流就是  $i_m(t)$ 。可见图1是图2中  $R_e = \infty$  时的特例。而当  $R_e$  为一有限值时, 即计及涡流时, 流过线圈的电流就应是  $i_m(t)$  和  $i_e(t)$  之和。

这样对应的动态微分方程组就变为:

$$\begin{cases} U(t) = [i_m(t) + i_c(t)] R + \frac{d\psi}{dt} & (6) \\ \psi(t) = \int_2 [i_m(t), s] & (7) \\ F(t) = \int_3 [W_u(t)] & (8) \\ m \frac{d^2 s}{dt^2} = F(t) - F_f(s) - F_f \left( \frac{ds}{dt} \right) & (9) \end{cases}$$

由于把流过线圈的电流分成激磁分量与涡流分量, 因而由方程(6)、(7)、(8)、(9)联立的微分方程组计及了涡流的影响。激磁电流 $i_m(t)$ 是与 $\psi(t)$ 或 $\varphi(t)$ 对应的, 它可用传统的方法求得, 而如何求得 $i_c(t)$ , 则是解上述微分方程组的关键。

### 三、涡流的近似表达式

涡流及由于涡流引起的磁通分布不均匀, 实质上可用电磁波在导电媒质中的传播来解释。因此, 我们从麦克斯韦尔方程组出发, 寻求涡流的近似表达式。

麦克斯韦尔方程组:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \rho \vec{V} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

一般可认为在电磁铁中传播的是平面电磁波。又由于我们所研究的螺管电磁铁其边界具有圆柱对称性, 因此采用圆柱坐标制计算。如图3示, 给出了选定的坐标轴, 其中Z轴与电磁铁的中心轴相重合, 极角 $\theta$ 的计算是以母线OA反时针旋转为正。在这样的坐标系中磁场强度 $\vec{H}$ 只有沿Z轴方向的分量。电场强度 $\vec{E}$ 只有沿 $\theta$ 角方向的分量。即:

$$\vec{H} = H \vec{e}_z; \quad \vec{E} = E \vec{e}_\theta.$$

代入麦克斯韦尔方程组中, 并按圆柱坐标制将旋度展开, 而且考虑到圆柱面的对称关系,  $E$ 和 $H$ 除为时间 $t$ 的函数外, 应仅为半径 $r$ 的函数。另外, 由于在导体中仅能存在传导电流 $\delta_e = \gamma \vec{E}$ , 而运流电流 $\rho \vec{V}$ , 位移电流 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 均等于零, 所以得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial r} = -\gamma E & (10) \\ \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} & (11) \end{cases}$$

从方程(10)和(11)中可进一步推得:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E = \mu \gamma \frac{\partial E}{\partial t} & (12) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial H}{\partial t} & (13) \end{cases}$$

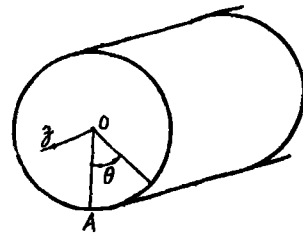


图3

这样就得到了一个仅含有待求函数 $E(r, t)$ 和 $H(r, t)$ 的偏微分方程组。但是求解它们是十分困难的。

对于我们所研究的电磁系统，在其动作过程中，磁通 $\varphi = \varphi(t)$ ，一般有如图4曲线所示的变化规律，而 $H = H(t)$ 也有类似的规律。

为此近似地令：

$$H(t) = H_m \sin \omega t.$$

这样 $H(t)$ 就可以用复数

$$\text{表示： } \dot{H} = H_m e^{j\omega t}$$

式中， $\omega$ ——角频率。

令 $X = r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ 代入方程(12)和(13)中，

$$\text{得： } \begin{cases} X^2 \frac{d^2 \dot{E}}{dX^2} + X \frac{d\dot{E}}{dX} + (X^2 - 1)\dot{E} = 0 & (14) \\ X^2 \frac{d^2 \dot{H}}{dX^2} + X \frac{d\dot{H}}{dX} + X^2 \dot{H} = 0 & (15) \end{cases}$$

方程(14)和(15)分别是贝塞尔方程式中 $n=1$ 和 $n=0$ 的情形，即分别为一阶和零阶的贝塞尔方程，其通解可表为：

$$\begin{cases} \dot{E} = C_1 J_1(X) + C_2 Y_1(X) \\ \dot{H} = C_3 J_0(X) + C_4 Y_0(X) \end{cases}$$

又因为  $X=0$ 时， $\dot{E} \neq \infty$ ， $\dot{H} \neq \infty$ ；

$$\text{则 } C_2 = C_4 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{E} = C_1 J_1(X) \\ \dot{H} = C_3 J_0(X) \end{cases}$$

令  $X = r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma}$  时  $\dot{H} = \dot{H}_0$

$$\text{则 } C_3 = \frac{\dot{H}_0}{J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma})} \text{ 所以 } \dot{H} = \frac{\dot{H}_0}{J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma})} J_0(X)$$

$$\text{又因为 } \frac{\partial \dot{H}}{\partial r} = -\gamma \dot{E}$$

$$\text{则 } C_1 = \frac{\dot{H}_0}{\gamma J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma})} \sqrt{-j\omega\mu\gamma}$$

$$\text{所以 } \dot{E} = \frac{\dot{H}_0}{\gamma J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma})} \sqrt{-j\omega\mu\gamma} J_1(X)$$

$$\dot{i}_e = \frac{L}{N} \int_{r_2}^{r_1} \gamma \dot{E} dr$$

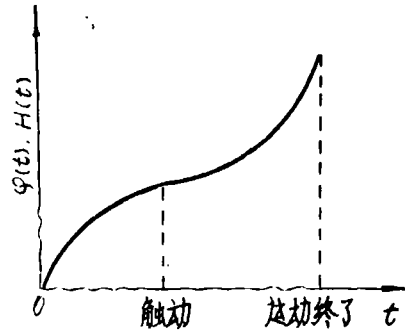


图4

$$= \frac{L}{N} \frac{\dot{H}_0}{J_0(r_1\sqrt{-j\omega\mu\gamma})} \left[ J_0(r_1\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) - J_0(r_2\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) \right] \quad (16)$$

式中:  $N$ ——线圈匝数;  $r_1$ ——铁心外半径,  
 $r_2$ ——铁心内半径, 当铁心为柱体时  $r_2=0$ ;  
 $L$ ——铁心的长度。

式(16)就是涡流的近似表达式。

#### 四、边界条件 $\dot{H}_0$ 和角频率 $\omega$ 、磁导率 $\mu$ 的确定及 $i(t)$ 的计算

$\dot{H}_0$  是方程(14)和方程(15)的边界条件。确立  $\dot{H}_0$  可根据全电流定律:

$$\oint_l \dot{H} \cdot dl = \int_S (\dot{\delta}_D + \dot{\delta}_C + \dot{\delta}_V) ds$$

因为  $\dot{\delta}_D = \dot{\delta}_V = 0$

$$\text{则 } \oint_l \dot{H} dl = \int_S \dot{\delta}_C ds = N\dot{I}$$

$$\text{又因为 } \oint_l \dot{H} dl = \oint_{l_0} \dot{H} dl + \dot{U}_s + \dot{U}_f$$

$$\dot{I} = \dot{I}_m + \dot{I}_e$$

$$\text{所以 } \oint_{l_0} \dot{H} dl = N(\dot{I}_m + \dot{I}_e) - \dot{U}_s - \dot{U}_f$$

式中:  $\dot{U}_s$ ——主工作气隙上的磁压降;

$\dot{U}_f$ ——非工作气隙上的磁压降;

$l_0$ ——计及涡流的铁磁体的边界计算长度。

现假设:

(1) 在衔铁和磁轭上的  $\dot{H}_0$  处处相等。在不考虑漏磁时, 这种假设是可以的, 因为在一般的螺管电磁铁中, 磁轭的截面积和衔铁的截面积几乎相等。

(2) 又因为在气隙中磁通是均匀分布的, 即无涡流的影响, 因此可以假设  $\dot{U}_s$  与  $\dot{U}_f$  与电流  $\dot{I}$  即  $(\dot{I}_m + \dot{I}_e)$  同相位。

于是得到

$$\dot{H}_0 = \frac{1}{l_0} \left[ (\dot{I}_m + \dot{I}_e) \cdot N - \dot{U}_s - \dot{U}_f \right]$$

$$\text{或 } H_0 = \frac{1}{l_0} (IN - U_s - U_f)$$

$$= aI - b$$

(17)

$$\text{式中: } a = \frac{N}{l_0}; \quad b = \frac{U_s + U_f}{l_0}$$

式(17)确定了边界条件  $\dot{H}_0$  与线圈工作电流  $\dot{I}$  的关系。

$\mu$ 是导磁体的磁导率。由于铁磁材料的非线性，使得 $\mu$ 为随 $H$ 而变的变量，也就是说方程(14)和(15)是非线性偏微分方程组。为计算方便我们近似地取磁化曲线的线性段的 $\mu$ ，从而使得非线性偏微分方程组简化为线性的偏微分方程组。这种近似是允许的，因为在动态过程中，电磁系统一般总工作在线性段，而动作完毕之后，才过渡到饱和段。

角频率 $\omega$ 的确定，可根据文献(1)中提供的公式：

$$t_c = \frac{L}{R} \ln \frac{1}{1 - \frac{R}{U} i_c} \quad (18)$$

$$t_d = \sqrt[3]{\frac{3m\delta_0}{U \sqrt[3]{\frac{F_f}{2\delta_0 L_0} - R \frac{F_f}{L_0}}}} \quad (19)$$

分别计算得到触动时间 $t_c$ 和运动时间 $t_d$ ，从而得到运动时间 $t = t_c + t_d$ 。进而取 $\frac{1}{4t} \cdot 2\pi$ 为角频率 $\omega$ 的零次近似值 $\omega_0$ 代入动态微分方程组进行计算。若计算后得到的动作时间或角频率 $\omega_1$ 与我们所取的零次近似值的误差小于给定的百分数，则认为所取的 $\omega_0$ 是适当的。否则应将计算后得到的 $\omega_1$ 乘以一个适当的系数进行修正。由于公式(18)和(19)是在进行了大量简化后得到的，因而计算后得到的 $\omega_1$ 或可能大于 $\omega_0$ ，或可能小于 $\omega_0$ 。若 $\omega_1 > \omega_0$ ，则可取一个小于1的系数，反之取一个大于1的系数。

在确立了 $\dot{H}_0$ 、 $\mu$ 、 $\omega$ 之后，就可以解得 $i(t)$ 了。

根据前面的分析，我们知道，电流 $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_m$ 和 $\dot{I}_e$ 及 $\dot{H}_0$ 满足图5所示的向量关系。

$$\dot{I} = I_m e^{j\theta}$$

$$\text{那么 } \dot{I}_m = I_{mm} e^{-j\varphi};$$

$$\dot{I}_e = I_{em} e^{j\theta}.$$

$$\text{对于某一时刻 } t, i(t) = i_m(t) + i_e(t) \quad (20)$$

$$\text{其中: } i(t) = I_m \sin \omega t$$

$$i_m(t) = I_{mm} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_e(t) = I_{em} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{从式(16)还可得到: } \dot{I}_e = \dot{K} \cdot \dot{H}_0$$

$$\text{其中: } \dot{K} = \frac{L}{N} \frac{1}{J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma})} \left[ J_0(r_1 \sqrt{-j\omega\mu\gamma}) - J_0(r_2 \sqrt{-j\omega\mu\gamma}) \right]$$

由于 $\dot{H}_0$ 与 $\dot{I}$ 同相位。

$$\text{则 } \dot{H}_0 = H_{om} e^{j\theta}; \quad \dot{K} = K_m e^{j\theta}$$

$$\dot{I}_e = K_m \cdot H_{om} e^{j\theta}$$

$$i_e(t) = K_m \cdot H_{om} \sin(\omega t + \theta) \quad (21)$$

$$\text{从式(17)中可得: } H_{om} = a I_m - b_m$$

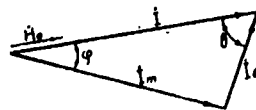


图5

式中:  $b(t) = b_m \cdot \sin \omega t$  或  $b_m = \frac{b(t)}{\sin \omega t}$

$$\text{则 } I_m(t) = K_m(aI_m - b_m) \sin(\omega t + \theta) \quad (22)$$

将式(22)代入式(20)得:

$$I_m \sin \omega t = im(t) + K_m(aI_m - b_m) \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$\text{所以 } I_m = \frac{im(t) - K_m \cdot b_m \sin(\omega t + \theta)}{\sin \omega t - aK_m \sin(\omega t + \theta)}$$

$$= \frac{im(t) - K_m \cdot \frac{b(t)}{\sin \omega t} \sin(\omega t + \theta)}{\sin \omega t - aK_m \cdot \sin(\omega t + \theta)} \quad (23)$$

和  $im(t)$  一样,  $b(t)$  也可以根据其时的磁状态解得, 于是通过式(23)就可以求得  $I_m$ , 从而解得  $ie(t)$  和  $i(t)$ 。

从图5中还可以看出, 激磁电流滞后于线圈工作电流, 因此磁通将滞后于磁势, 这个结果和文献(2)中得到的结论是一致的。

## 五、计算框图和测试框图。

本文采用的计算方法是用 Runge-Kutta 方法解动态微分方程组(6)、(7)、(8)、(9)并用磁路的方法来处理磁系统。计算是在电子数学式计算机上进行的。

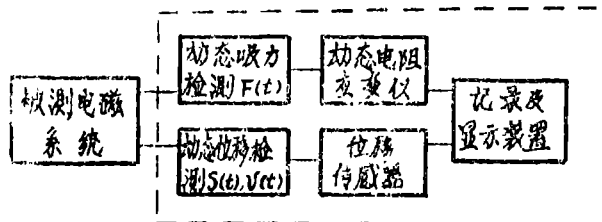
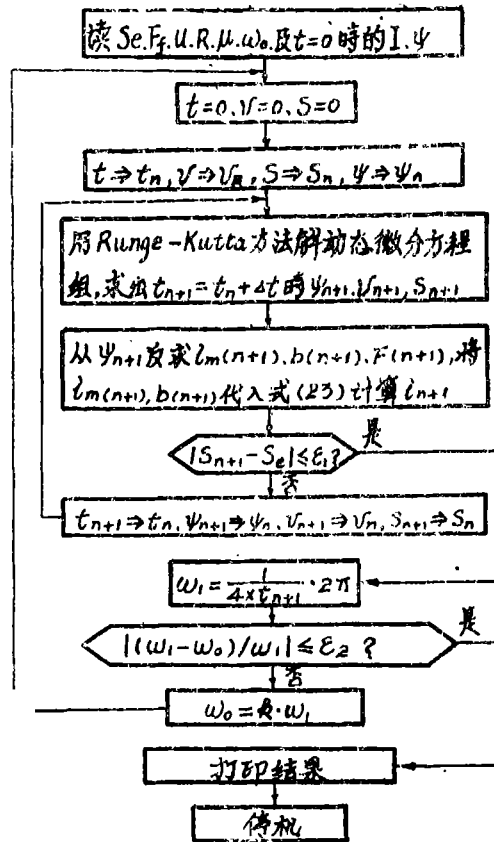
计算框图: 见右上图。

注: 框图中  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  为收敛因子。

$k$  为一常数。

我校研制成的电磁系统动态测力装置方框图: 见右图。

图中虚线方框所示即为动态测力装置。



## 六、计算实例

本文对上海第三机床电器厂生产的 MQZ 1—10 直流长行程截锥头螺管电磁铁进行了动态计算, 同时也进行了动态测试。

MQZ 1—10 直流长行程截锥头螺管电磁铁的结构尺寸见图 6。

铁心为非迭片式, 导磁体为工程纯铁。线圈匝数  $N = 5341$ 。

$$\text{① } U = 110V, R = 152.78\Omega, I_y = 0.72A, F_f = (10 + \frac{S}{se} \cdot 1.4) Kgf$$

$se = 20\text{mm}$ ,  $m = 10\text{Kg}$

$\gamma = 8.3 \times 10^{11} / \Omega \cdot M$ ,

$\mu = 1600 \pi \times 10^{-7} \text{H/M}$ ,

$\omega_0$  则通过公式(18)、(19)计算。

通过磁路计算得：

$L_0 = N^2 \cdot G_0 = 10.8(\text{H})$ ;  $i_0 = 0.574(\text{A})$ 。

所以  $t = (112 + 122)\text{ms} = 234\text{ms}$ 。

$$\omega_0 = \frac{1}{4t} \cdot 2\pi = 1.07 \times 2\pi (\text{弧度/秒})$$

计算值与未计及涡流时的计算值以及实测值的比较见图7、8、9和10。

通过计算最后近似地取  $\omega = 0.85 \times 2\pi$  弧度/秒。

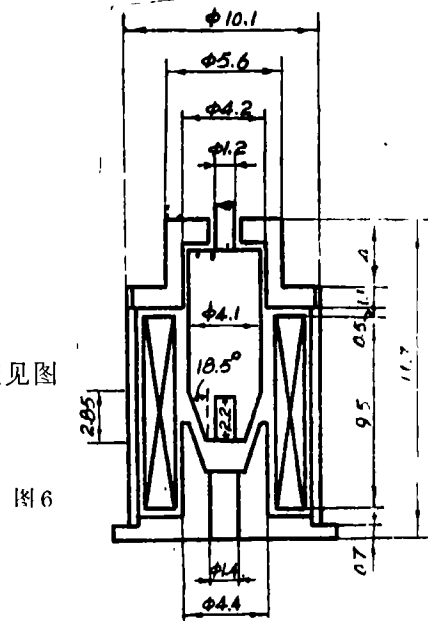


图6

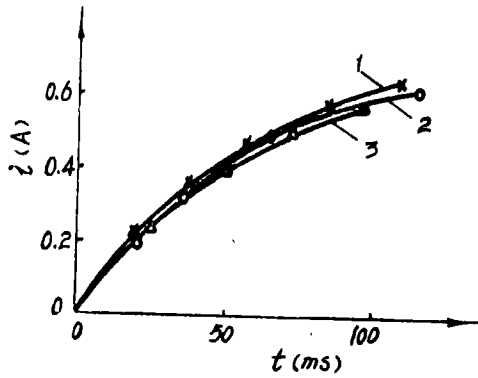


图7

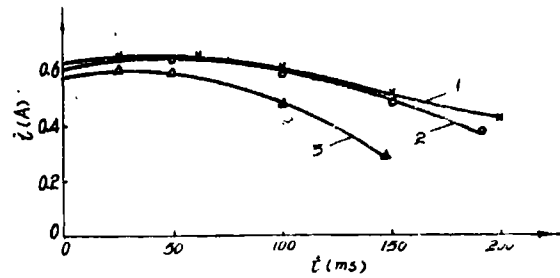


图8

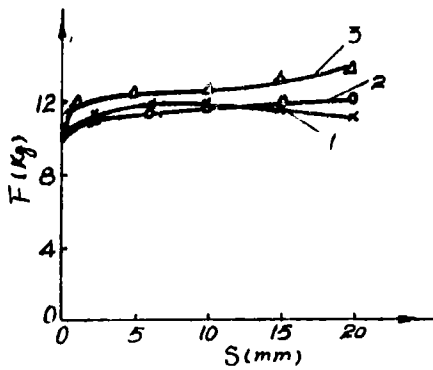


图9

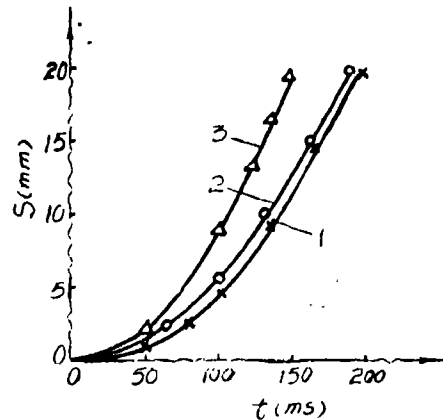


图10



图中，曲线1为实测值，曲线2为计及涡流时的计算值；曲线3为不计涡流时的计算值。

②  $U=110V$ ;  $R=130.5\Omega$ ;  $I_y=0.843A$ ;

$F_f=(10+\frac{s}{s_e}\cdot 1.4)Kgf$ ;  $s_e=20mm$ ;  $m=10Kg$ ;

取 $\gamma=8.3\times 10^{61}/\Omega\cdot M$ ;  $\mu=1600\pi\times 10^{-7}H/M$ ;

计算得 $t=214.5ms$ 。

$\omega_0=\frac{1}{4t}\cdot 2\pi=1.163\times 2\pi$  (弧度/秒)

计算值与实测值的比较见图11、12、13、14。

通过计算最后近似取 $\omega=1\times 2\pi$  (弧度/秒)

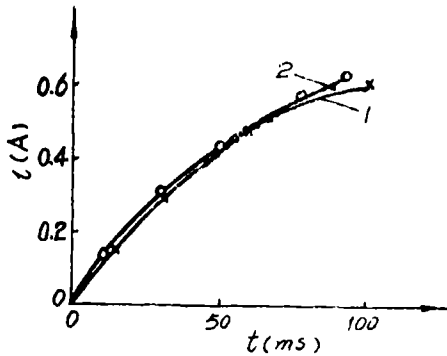


图11

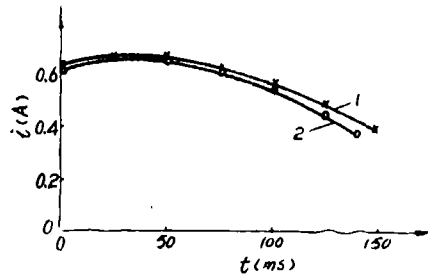


图12

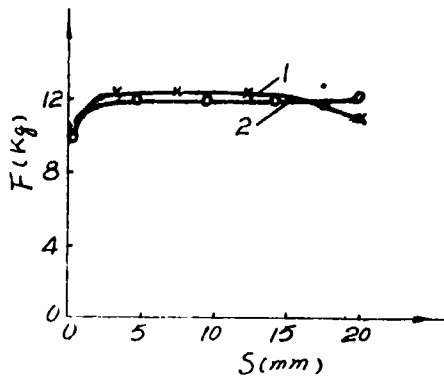


图13

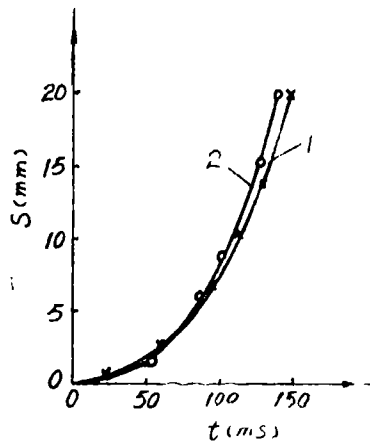


图14

图中，曲线1为实测值，曲线2为计及涡流时的计算值。

## 七、结 论

1. 从前面的两个计算实例中可以看出, 本文的计算方法由于计及了涡流在动态过程中的影响, 从而使计算精度较未考虑涡流时大为提高, 见表下。和文献(1)、(2)、(3)、(4)、(5)中提供的有关动特性计算相比, 本文的误差是较小的。

计算方法	误差	触动时间	运动时间	动态电流	动态吸力	动态吸力	位移最大
	误差	误差	最大误差	最大误差	平均误差	误差	
计及涡流	-5.17%	-6.5%	-14.6%	+11.3%	+4.44%	+6.38%	
未计及涡流	-16.38%	-26.5%	-34.8%	+27.1%	+11.3%	+66.7%	

2. 本文的计及涡流的动态吸力主要是通过把磁系统等效成磁路, 解相应的动态微分方程组求得的。和文献(2)中应用有限元素来解动态方程相比, 方法简便, 较适合于一般的工程计算。

3. 在应用本文所介绍的方法计算动特性时, 寻求  $H_0$  的较精确的变化规律, 是很重要的。如在分析计算中不仅考虑到它的基波分量, 同时也考虑其它高次谐波分量(主要是三次谐波和五次谐波), 将可望进一步提高计算精度。

### 参 考 文 献

- [1] 张冠生、陆俭国主编, 《电磁铁与自动电磁元件》, 机械工业出版社出版, (1982)。  
 [2] 别所一夫等著, 《螺管式直流电磁铁过渡特性的分析》, 低压电器技术情报, №<sub>2</sub>(1981)。  
 [3] А. К. Тер-Акопов, «Динамика быстродействующих электромагнитов» Издательство «Энергия» (1965).  
 [4] А. Т. Сливинская, «Исследование динамических тяговых характеристик электромагнитов постоянного тока» Н. В. У. З. «Электромеханика» (1965)  
 [5] 高季雍, 《直流拍合式电磁机构动特性计算和最佳设计的研究》, 西安交通大学(研究生毕业论文)(1982)。

## CALCULATING THE DYNAMIC PULL OF DC TRUNCATED CONE SOLENOIDAL ELECTROMAGNET WITH THE EFFECT OF EDDY CURRENT IN CONSIDERATION

Chen Yiping and Chang Guangsheng

### Abstract

In calculating the dynamic character of D.C. truncated cone nonlaminated solenoidal electromagnet, we must consider not only the magnetic resistance of core and the leakage flux, etc, but also the eddy current. Due to the effect of

eddy current, the dynamic current of coil will increase, the pull will decrease, and the operating time will also increase. This paper first makes an equivalent circuit of D. C. electromagnetic system, in which the coil current is composed of two parts one is the current which produces magnetic flux, and the other is the eddy current which can be calculated by Maxwell's equations. And then this paper advances further to a new method of calculating the dynamic pull which considers the effect of eddy current. By this method, the calculation of pull gives a result which proves to be fairly similar to that of the experiment.