

关于一个不等式的估计

黄迅成

(上海计算技术研究所)

本文指出文[1]的一个不等式的估计是错误的, 并进行了适当修正, 使之仍满足原来要求的精度。

文[1] (1963年7月第一版, 1979年4月第七次印刷) 第一卷第一分册, 代数方程的解法, 第244页不等式的估计是错误的。原书为*:

$$\begin{aligned}
 \xi^* - \xi = \frac{f''(a+\theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(a-0.01)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(1)}{2f'(1.01)}(0.01)^2 < 0.00013 \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)
 \end{aligned}$$

事实上, 由于 $g(a) > L \geq g(a-0.01)$, $a > \xi \geq a-0.01$, 于是 $0 > \xi - a \geq -0.01$, 此即

$$-0.01 \leq \eta < 0, \quad (2)$$

从而, η 是负值。我们有

$$a + \theta\eta > a - 0.01. \quad (3)$$

又由于 $f'''(x) > 0$, ($x \geq 0$), 可见 $f''(x)$ 在所给区间是增函数, 从而有

$$f''(a + \theta\eta) > f''(a - 0.01). \quad (4)$$

因为 $f'(a) > 0$, 所以有

$$\frac{f''(a + \theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 > \frac{f''(a - 0.01)}{2f'(a)}\eta^2 \quad (5)$$

显然, 原书所用的不等式估计式(1)中第一步估计就搞错了不等号方向, 于是后面的估计便全错了。

我们可修改如下:

不难证明, 我们有

$$\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)' < 0, \quad x \in [1, 2] \quad (6)$$

于是, 当 $a \geq 1.01$ 时, 有

$$\xi^* - \xi = \frac{f''(a + \theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(a)}{2f'(a)}\eta^2 \leq \frac{f''(1.01)}{2f'(1.01)}(0.01)^2 < 0.0001328 \quad (7)$$

于是实际的结果并不象原书本来所指望的那样好, 但显然也满足一开始就要求的三位准

本文1982年12月13日收到。

* 本文所采用的符号均按原著。

确的精确度了。

参考文献

[1] 华罗庚, 高等数学引论, 1卷1分册, 科学出版社, 北京, 1979。

EVALUATION OF AN INEQUALITY

Huang Xuncheng